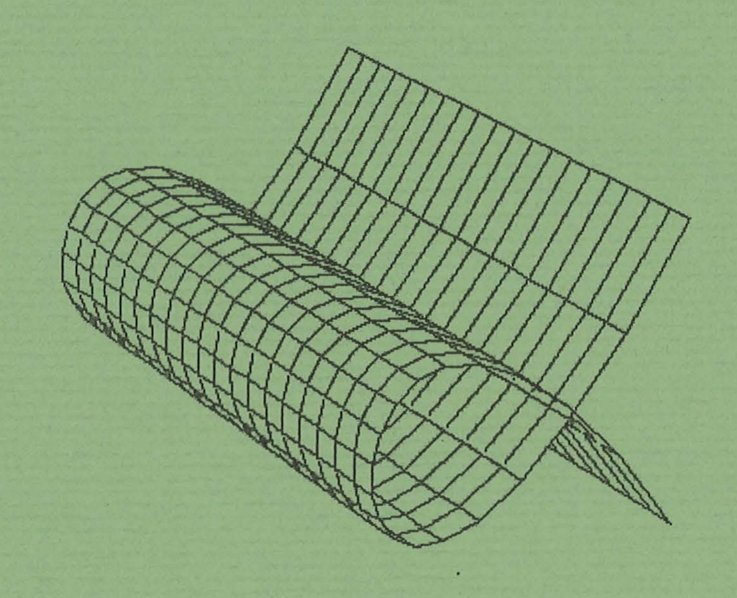
GEOMETRÍA DIFERENCIAL

ACERCA DE LA CURVATURA DE LAS SUPERFICIES

por

RAMÓN J. ZOIDO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-53-02

GEOMETRÍA DIFERENCIAL

ACERCA DE LA CURVATURA DE LAS SUPERFICIES

por

RAMÓN J. ZOIDO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-53-02

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

3 Área
53 Autor
02 Ordinal de cuaderno (del autor)

Geometría diferencial: acerca de la curvatura de las superficies.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Gestión y portada: Laura Bejerano Iglesias
CUADERNO 154.01/ 3-53-02
ISBN: 84-9728-085-7
Depósito Legal: M-40300-2003

GEOMETRÍA DIFERENCIAL
ACERCA DE LA CURVATURA DE LAS SUPERFICIES

Se abordan aquí cuestiones paralelas a las estudiadas en un curso básico de Geometría Diferencial en lo que se refiere al análisis clásico de la forma de las superficies, con la intención de explicarlas y complementarlas. Por eso, el orden de los diferentes resultados que se introducen en este texto no es el habitual deductivo sino descriptivo y recopilatorio, salvo en algunos puntos en los que se ha considerado conveniente realizar razonamientos deductivos. Por otra parte no se escatiman, por obvias, las cuestiones más elementales, pero tampoco se omiten algunas referencias a otros aspectos de mayor complejidad. Se pretende dar una visión global de algunos aspectos relacionados con la curvatura de las superficies y clarificar el papel de los diferentes vectores y su prelación en el análisis. Se incluyen, además, algunos ejercicios sencillos pero representativos, relativos a cuestiones importantes como el cálculo de los radios de curvatura principal o la determinación de las líneas de curvatura y asintóticas. Finalmente, se añaden algunas notas de carácter muy general sobre aspectos que, por diferentes motivos, pueden relacionar las superficies con el campo arquitectónico.

Para la representación gráfica de algunas superficies menos comunes o para algunos trazados no triviales sobre las mismas, no se ha acudido a ningún programa especial. Se han realizado con los cálculos complementarios adecuados, apoyándose en un simple programa de representación de curvas y superficies, auxiliado por un software común de tratamiento de imágenes.

Tengo que agradecer, una vez más, la lectura y revisión de este trabajo a los profesores **José Rojo** y **Miguel de Unamuno**. Sus correcciones, comentarios y aportaciones puntuales han resultado imprescindibles para adecuar el texto, sobre todo en su planteamiento inicial. No obstante, podrán aparecer erratas e imprecisiones que se corregirán en sucesivas revisiones.

§ 1.-Algunas consideraciones iniciales sobre superficies parametrizadas.

Estamos interesados, en primer lugar, en describir algunos instrumentos matemáticos que nos permiten conocer mejor y auxiliar o facilitar el diseño de estos objetos geométricos que reconocemos como superficies "clásicas", predominantemente en algunos de sus aspectos creativos o constructivos. Uno de esos instrumentos es el análisis vectorial sobre las superficies parametrizadas, que nos facilita, entre otras cosas, la caracterización o descripción de las cualidades de la forma en las superficies y, en algún sentido también, de la cuantificación de la misma que es, básicamente, objeto de este trabajo. Las superficies parametrizadas no solo nos permiten determinar propiedades geométricas de las superficies, sino que representan un método sencillo para localizar los puntos sobre las mismas en los sistemas de coordenadas rectangulares utilizados habitualmente.

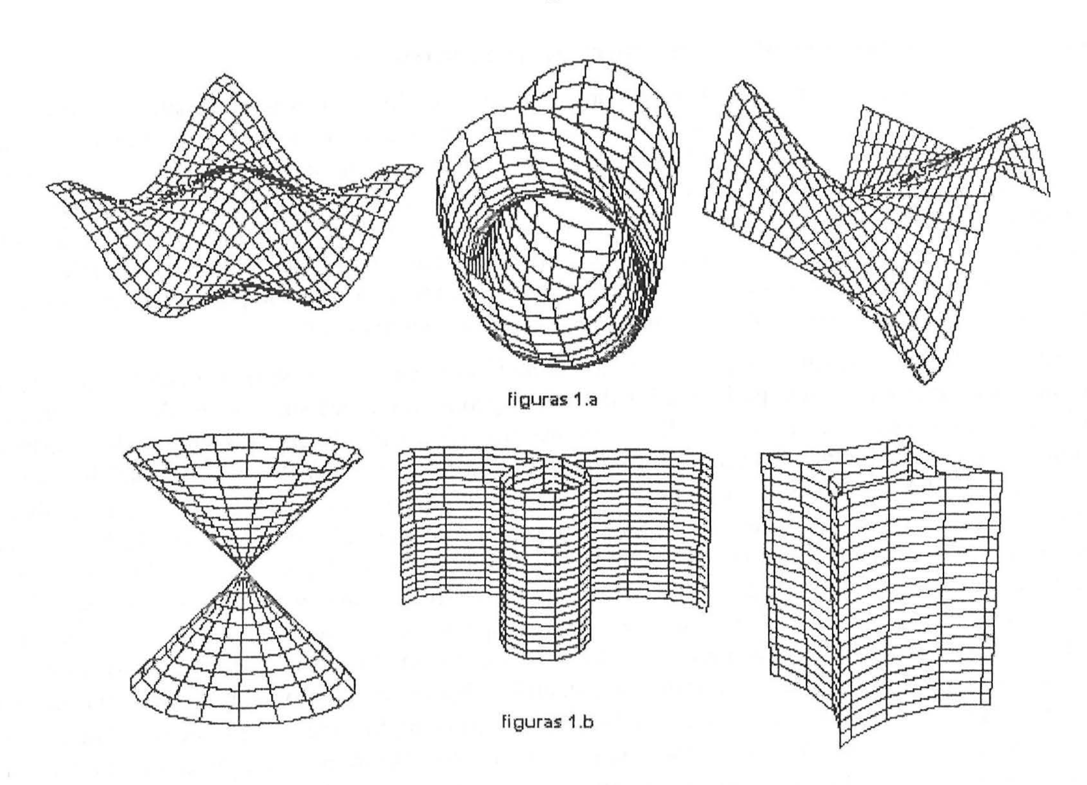
En segundo lugar, también es objeto de nuestra atención la manera en que estos instrumentos matemáticos pueden entrar a formar parte de otro problema ligado con la geometría de las superficies. Aquí nos encontramos, por ejemplo, con las condiciones en que la forma de las superficies incide en los cálculos de la estabilidad y resistencia de las materializaciones físicas más próximas a estos modelos geométricos. Los análisis y los cálculos sobre estos objetos reales se realizan con superficies – de una u otra manera – parametrizadas. Para abordar, por ejemplo, problemas de estabilidad de las láminas o cáscaras de pequeño espesor asimilables a superficies matemáticas que idealizan el modelo físico, es imprescindible en primer lugar conocer bien los instrumentos vectoriales para representar y expandir sobre ellos los esfuerzos y obtener ecuaciones de equilibrio o de compatibilidad. Desde luego que es interesante conocer los aspectos de las superficies que se relacionan con los problemas de medida sobre las mismas, pero sobre todo es imprescindible conocer bien sus aspectos de forma. Particularmente se pone de manifiesto, trivialmente, cuando abordamos el problema de las citadas láminas o cascarones desde la teoría general de la flexión – o desde una teoría simplificada "ad hoc"de membranas –, pues ya es sabida la importante vinculación entre curvaturas y momentos flectores. En este caso, manejaremos tres entidades con instrumentos analíticos comunes: las curvaturas, las tensiones y las deformaciones. Sobre este último aspecto se incluirán algunas notas de carácter muy general.

Nos referiremos siempre a fragmentos de superficies cubiertas con una sola parametrización delimitadas por los valores de los parámetros. Es importante insistir en el hecho de que siempre que hablemos de superficies, se va a estar hablando, en realidad, de regiones finitas, lo que por otra parte es congruente con nuestra propia percepción de las cosas. Esta restricción implica, por una parte, un estudio local de las superficies, evitando características que afecten a la totalidad de las mismas tales como su orientabilidad. Por otra parte, se puede decir que con operaciones sencillas, y auxiliados por funciones elementales tales como polinomios, funciones circulares o hiperbólicas, exponenciales, etc, podemos representar con una sola parametrización una cantidad de superficies tan grande y tan variada, con peculiaridades tan diferentes entre sí y, a veces, tan sorprendentes que, en estas condiciones, se dispone de un campo prácticamente ilimitado de generación de formas curvadas.

Por todo lo dicho, es suficiente considerar la superficie como el conjunto imagen en $\Re^3 \equiv Æ$ de una función vectorial, $\underline{r}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{y}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{z}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}$, definida en un dominio $\mathbf{U} \subset \Re^2$, con derivadas parciales continuas de todos los órdenes, aunque, en realidad poco queda alterado substancialmente con condiciones de regularidad –funcional– menos exigentes. El que caractericemos el conjunto **U** como un "abierto" tampoco es demasiado relevante a efectos puramente prácticos. Por último, se puede prescindir de cualquier otra característica formal de tal aplicación.

Con $\underline{\mathbf{r}}_u = \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{u}}$ y $\underline{\mathbf{r}}_v = \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{v}}$, los puntos de la superficie en los que $\underline{\mathbf{r}}_u \times \underline{\mathbf{r}}_v \neq \mathbf{0}$ serán los puntos **regulares** de la superficie, objeto de nuestra atención.

De todas las posibles superficies que siguen la definición anterior nos vamos a limitar a aquellas que, en el fragmento delimitado por los valores de los parámetros, exista un número finito de puntos singulares aislados, o bien conjuntos de puntos singulares agrupados a lo largo de un número finito de diferentes líneas. En general, se puede decir que prácticamente todos los conjuntos de puntos de $\Re^3$ obtenidos en estas condiciones merecen, desde nuestro punto de vista, ser llamados "superficies" sin más, como lo son las representadas tanto en las figuras 1.a como en las 1.b.



figuras 1.a

figuras 1.b

Hablaremos pues de fragmentos de superficies regulares salvo en algunos puntos aislados o en conjuntos de líneas rectas o curvas. Si queremos, podemos determinar estos puntos singulares y, posteriormente, si lo encontramos necesario, abordar un estudio particular en sus proximidades, pero esta determinación, en la mayoría de los casos, no es imprescindible. Nos queremos centrar aquí en estudiar la forma –caracterizada y precisada por la curvatura – en cada punto regular de la superficie puesto que va a ser una característica local de la misma.

Las singularidades son, por otra parte, inevitables, cuando las superficies se convierten en "objetos reales", ya que la limitación de parámetros introduce en las superficies bordes que adquieren automáticamente categoría de líneas de puntos de carácter singular sobre fragmentos que, por otra parte, podrían ser completamente regulares en cuanto a su comportamiento si trascendieran de sus límites. Estos bordes son siempre tratados de forma independiente, tanto matemática como físicamente en los casos reales y, como se sabe, la finitud de las superficies regulares es generalmente, desde el punto de vista técnico, el condicionante más importante y determinante de la mayoría de los problemas físicos relacionados con estos objetos, por lo que no parece imprescindible seguir ahondando en demasiados formalismos adicionales o en distinciones conceptuales al respecto sobre superficies que puedan tener o no tener bordes. Estos límites se convierten físicamente en auténticas singularidades funcionales, como ocurre en determinadas láminas o cascarones, en los que incluso pueden hacer imposible o indeterminado el comportamiento elástico. Se puede aceptar, si se quiere, que se considere a las superficies como objetos delimitados por bordes pero sin los bordes, lo que sería congruente con la caracterización de la superficie parametrizada como la imagen de un conjunto **U** abierto.

En muchas ocasiones, haremos referencia a la superficie describiendo sólo la función vectorial $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sin especificar explícitamente el dominio **U** que delimita el fragmento considerado. En este caso debe sobrentenderse siempre la existencia de tal rango de variación de los parámetros que nos permite convertirlo en un objeto susceptible de representación gráfica y de una "reconstrucción" física de la idealización del modelo. Así, reconoceremos, por ejemplo, la parametrización $\{\mathbf{u+v},\ \mathbf{u-v},\ \mathbf{4\ u\ v}\}$ como un (fragmento de) paraboloide hiperbólico.

Cada superficie parametrizada va a constituir una clase de equivalencia, lo que quiere decir, simplemente, que un mismo conjunto de puntos de $\Re^3$ puede ser representado por distintas parametrizaciones. Se comprende que basta considerar el cambio de parámetros $\underline{\varphi}$: $\mathbf{u} = \varphi_1(\lambda, \theta)$, $\mathbf{v} = = \varphi_2(\lambda, \theta)$, con $\underline{\varphi}$ suficientemente regular, para que la superficie parametrizada $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ se convierta en la $\underline{\mathbf{r}}\,(\varphi_1(\lambda, \theta), \varphi_2(\lambda, \theta)) = \underline{\mathbf{r}}\,^*(\lambda, \theta)$.

Se reserva la denominación de cambio "admisible" de parámetros para los que conserven la regularidad de cada uno de los puntos del fragmento considerado, lo que determina condiciones de no anulación del Jacobiano de φ en la correspondiente aplicación entre intervalos que formaliza el cambio.

Por ejemplo, puede comprobarse que, sea cual sea el intervalo de variación de los parámetros, en la parametrización **{u+v, u −v, 4 u v}** del paraboloide hiperbólico, todos los puntos resultan regulares, en la parametrización **{u+ sen λ, u − sen λ, 4 u sen λ}**, sin embargo, pueden existir, o no, líneas de puntos singulares según el dominio **U** que delimite la región, y la parametrización $\{u+\frac{1}{\mu}, u-\frac{1}{\mu}, 4\frac{u}{\mu}\}$ puede describir perfectamente algunos fragmentos regulares de la misma superficie.

Los cambios de parámetros que permiten el paso de la primera a las dos últimas pueden ser, por distintas razones, "no admisibles" según el rango de valores que consideremos.

De los ejemplos anteriores se deduce la importancia de la elección de la parametrización para representar cualquier sector de un paraboloide hiperbólico y, generalizando, para representar cualquier otro fragmento de un conjuntos de puntos representables paramétricamente por una función vectorial.

Una posible parametrización del paraboloide anterior es la $\{u, v, u^2-v^2\}$. Cuando un fragmento de superficie venga representado en la forma **{u, v, z(u, v)}** diremos que la superficie está expresada en la "**forma de Monge**", utilizada ampliamente por todos los grandes primeros impulsores de las aplicaciones del Análisis a la Geometría Diferencial. Esta es una forma explícita como lo son las **{u, y(u, v), v}** o **{x(u, v), u, v}**. Conviene no confundir esta forma de representación paramétrica "de **Monge**" con las llamadas superficies "de **Monge**" o de curvas paralelas –que son casos particulares de las superficies "de **Darboux**"– y que, así mismo, tampoco deben ser confundidas con las superficies de traslación.

En las superficies en general, o en las parametrizadas, nos podemos encontrar con que la locución "regular" puede ser empleada con diferentes sentidos. Esto es consecuencia de que, en general, una superficie regular puede ser contemplada como un objeto geométrico formado por superposición de fragmentos que la recubren en su integridad y que pueden interpretarse como regiones de plano deformadas de tal manera que no pierdan sus propiedades topológicas tales como la compacidad, la conexión, la dimensión o la orientabilidad. Este punto de vista es fundamentalmente cualitativo. Así que por un lado podemos contemplar las superficies considerándolas como conjuntos de puntos instalados en $\mathfrak{R}^3$ pero con una estructura en cierto modo bidimensional, y por otro tenemos las superficies parametrizadas que es una dotación instrumental dentro de la teoría de funciones vectoriales, que nos permiten representar estos conjuntos por medio de funciones. Cuando necesitamos describir una superficie, punto a punto, mediante coordenadas en el espacio $\mathfrak{R}^3$ de la geometría ordinaria y realizar cálculos que permiten obtener resultados de problemas de medida sobre las superficies, o bien describir las propiedades locales de su forma, necesitamos acudir a las funciones y a sus derivadas, lo que nos lleva a tratar estos problemas sobre curvas o superficies parametrizadas en el ámbito del análisis vectorial que es, básicamente, el objeto de la **Geometría Diferencial**.

De la misma manera que se puede definir, en general, un arco de curva regular como cualquier conjunto de $\mathfrak{R}^3$ homeomorfo a un intervalo de $\mathfrak{R}$, las regiones de superficies regulares pueden ser, análogamente, definidas como conjuntos de $\mathfrak{R}^3$ homeomorfos a un intervalo de $\mathfrak{R}^2$, esto es, a un fragmento de plano con determinadas propiedades topológicas. De aquí que nos encontremos con diferentes definiciones que se refieren a la superficie regular, cualitativamente, como un conjunto de puntos de $\mathfrak{R}^3$ más una colección de homeomorfismos entre abiertos de $\mathfrak{R}^2$ y $\mathfrak{R}^3$, que nos pueden resultar un tanto ajenas desde un punto de vista básicamente instrumental; esto puede ocurrir, por ejemplo, al introducir el concepto de superficies parametrizadas regulares como un conjunto de difeomorfismos – cartas locales, entornos de coordenadas, elementos de superficie o como se quieran denominar –, con condiciones que nos permitan conservar determinadas propiedades en los cambios de representación. Como ocurre en el caso de las curvas parametrizadas, pero aún en mayor medida, la búsqueda de definiciones de superficies parametrizadas regulares con diferentes órdenes de generalidad y la descripción matemática de las mismas puede, como se ha dicho, llegar a crear una exagerada cantidad de precisiones formales, que, a su vez, requieren el conocimiento y dominio de otros instrumentos matemáticos que, en el fondo, pueden quedar fuera de nuestro interés. En general, "cargar" con éstas y otras innumerables cuestiones antes de acercarse al análisis de su forma puede resultar superfluo y desorientador.

De lo anterior y de los ejemplos citados, se infiere que pueden existir dos tipos de puntos singulares en una superficie parametrizada: aquellos cuyo fundamento es cualitativo, en el sentido de comportamiento adecuado al objeto definido, que constituirán los puntos singulares "intrínsecos" de la superficie, vinculados a su forma, y aquellos otros consecuencia de la parametrización elegida. La elección de una parametrización implica, como se sabe, la elección de ciertos conjuntos de líneas que la reconstruyen en $\mathfrak{R}^3$, denominadas "curvas coordenadas". Puede ocurrir que una superficie tenga, en algún punto, un comportamiento regular en el sentido de la adecuación al concepto, ser además todas las funciones involucradas en la parametrización de suficiente regularidad, y sin embargo mostrarse como singulares a consecuencia de constituir el punto una anomalía o singularidad, por diferentes razones, de las congruencias de curvas vinculadas a la parametrización elegida. Sobre esto se hablará en el § 12 y pueden servir de ejemplo las figuras 28, 29 y 30 de dicho apartado. Estos puntos se llamarán puntos singulares no intrínsecos de la superficie o, si se quiere, singularidades no vinculadas a su forma. No obstante pasa que, a efectos de los cálculos que queremos realizar sobre las superficies parametrizadas, las razones de la singularidad no importan. Puesto que el análisis de la forma va ser una característica local, deberemos asegurarnos simplemente que en el punto objeto de nuestra atención el producto $\underline{\mathbf{r}}_u \times \underline{\mathbf{r}}_v$ sea un vector no nulo.

Por otra parte y desde un punto de vista completamente distinto, se puede constatar que en muchos casos son las singularidades esenciales o "intrínsecas" – antítesis del comportamiento regular cualitativo – las que aportan algún interés a muchas superficies, vistas como objetos constructivos o, al menos, como objetos creativos, imprevisibles y representables en el espacio real de tres dimensiones.

Finalmente, se puede añadir que las nuevas herramientas tecnológicas que hacen posible, con extraordinaria facilidad, representar gráficamente y visualizar espacialmente objetos tridimensionales, ha permitido que volvamos a revisar de otra manera problemas – como el de la propia parametrización de las superficies – con mucha mayor claridad, y podamos centrarnos en algunos detalles cuya explicación desde el punto de vista del análisis formal resulta más compleja. Podemos, por ejemplo, acercarnos con procedimientos informáticos sobre la representación gráfica de una superficie parametrizada para visualizar su forma en la proximidad de los puntos singulares o, por poner otro ejemplo, para ver el comportamiento de las líneas de curvatura principal de una superficie –referida a sus líneas de curvatura– en las proximidades de los puntos umbílicos aislados, lo que permite incorporar estos medios auxiliares al puro análisis cualitativo. Para el conocimiento instrumental de las superficies de las que estamos hablando, no se debería –aunque se puede– seguir anclado en una descripción de la geometría diferencial que carecía de estas facilidades de visualización, incluso con preferencia sobre otros formalismos que pueden tener un campo minoritario de interés. Por otro lado, estas herramientas de representación y de cálculo, ponen al alcance medios poderosos no sólo para el análisis sino también para la creatividad, lo que a su vez puede proporcionar nuevos objetos, nuevos análisis y nuevos problemas a considerar.

§ 2.-El plano tangente.

En las superficies parametrizadas, los cálculos para resolver los distintos problemas de medida – que pueden reducirse a productos escalares – se realizan sobre cada uno de los planos tangentes a la superficie. Para el análisis de la forma – dependiente de la variación de la normal a la superficie – necesitaremos también garantizar su existencia en los puntos de la región objeto del análisis. En los puntos singulares, los procedimientos generales para estos cálculos carecen de sentido ya que el plano tangente no está determinado.

Ya se ha dicho que, sean consecuencia de la propia forma de la superficie o debidos a la parametrización elegida, en los puntos singulares tenemos vedado, de igual modo, cualquier tipo de cálculos sobre el plano tangente a todos los efectos. No obstante, queda claro que las singularidades "artificiales" aisladas – debidas a la parametrización –, no tienen nada que ver con la forma de la superficie, sino tan solo con la inexistencia eventual del plano tangente.

Geométricamente, el plano tangente $\mathbf{T_P}$ es un espacio vectorial tangente asociado a cada punto **P** regular de una superficie. Este plano está definido en **P** por los vectores $\underline{\mathbf{r}}_u$, $\underline{\mathbf{r}}_v$, vectores que ni se pueden anular ni hacerse linealmente dependientes en un punto regular. Por lo dicho anteriormente, desde el punto de vista del análisis de los problemas de medida, y sobre todo en los problemas de forma, es conveniente observar al plano tangente en un punto **P**, no solo como el plano en el que se encuentran las tangentes a cualquier curva sobre la superficie trazada por **P**, sino como un plano en el que cualquier recta determinada por **P** y por cualquier vector de $\mathbf{T_P}$, agrupa un conjunto muy variado de curvas sobre la superficie – contenidas en un plano o alabeadas – que pasan por **P** y que la tienen como recta tangente.

Como veremos, una forma reductiva de estudiar la curvatura de una superficie – o sea: el de estudiar una medida indicativa de su forma local – es hacerlo a través de la observación del comportamiento formal de las curvas trazadas sobre la misma. Estos trazados que resultan ser trivialmente necesarios en el estudio de los problemas de medida – ya que inevitablemente estaremos considerando curvas sobre las que medimos su longitud, o curvas de longitud mínima, por ejemplo, o bien las que determinan un ángulo entre sí o las que delimitan un recinto, etc –, se convertirán en auxiliares para el análisis de la "forma" de la superficie en cada punto de la misma.

Resulta conveniente imaginarnos situados en un punto cualquiera de la superficie regular, dispuestos a recorrerla, en cualquier sentido, en los múltiples itinerarios que representan las distintas curvas que desde él podemos trazar sobre ella. En cada punto de ese trazado disponemos constantemente a nuestros pies del plano tangente, y sobre nosotros de su recta normal, que es también la que denominamos recta normal a la superficie. Estos dos elementos: plano tangente y recta normal, asociados inseparablemente, nos van a acompañar permanentemente en nuestro recorrido para poder realizar operaciones (figura 2).

En cada punto del itinerario elegido podemos ver, desde la propia superficie, "flotar" sobre el plano tangente la tangente a la trayectoria, que estará determinada matemáticamente por un vector cualquiera $\underline{\mathbf{a}}$ entre todos sus equivalentes, de los cuales el vector unitario $\underline{\mathbf{a}}_1$ es estrictamente el vector tangente a la curva trazada. Este vector cambia de dirección respecto de su base en el propio plano tangente y ésta base, a su vez, cambia de un punto a otro de la trayectoria, cosa que no debe preocuparnos. En el seguimiento de las variaciones de dirección de este vector tangente y en las variaciones de dirección del vector normal a la superficie a lo largo del itinerario trazado y, sobre todo, en la comparación e interrelación mutua de ambos vectores está, como después veremos, una de las claves de la caracterización de la curvatura sobre la superficie, y por lo tanto de la forma de la propia superficie.

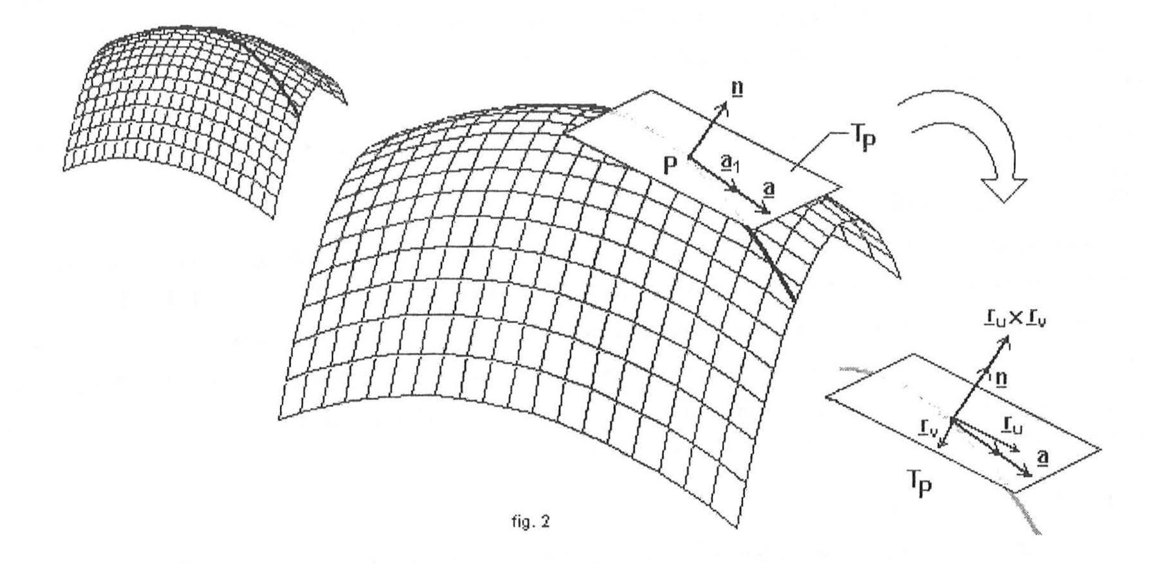


fig. 2

Por lo dicho, y puesto que vamos a trabajar con vectores situados en el plano tangente T_P de cada punto **P**, podemos caracterizar cualquier vector $\underline{a}$ de T_P por sus dos componentes respecto a la base del mismo $[\underline{r}_u, \underline{r}_v]$. La función vectorial $\underline{r}(u, v) = x(u, v)\,\underline{e}_1 + y(u, v)\,\underline{e}_2 + z(u, v)\,\underline{e}_3$, la representaremos simplemente en la forma:

$\underline{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$

y el plano tangente está determinado en cada punto regular **P**, por **P** y por los vectores:

$$\underline{r}_u = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\underline{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial u}\underline{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial u}\underline{e}_3, \text{ o sea: } \underline{r}_u = \{\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\},$$

$$\underline{r}_v = \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\underline{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial v}\underline{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial v}\underline{e}_3, \text{ o sea: } \underline{r}_v = \{\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\},$$

que pueden tener magnitudes y direcciones arbitrarias dentro de T_P.

Mientras tanto, la normal a la superficie en cada punto **P**, vendrá expresada por su vector unitario estándar:

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} = \underline{n}(u, v),$$

siendo el sentido del vector $\underline{n}$, inducido por el producto vectorial ("levógiro", por ejemplo) totalmente arbitrario, ya que los parámetros "**u**" y "**v**" pueden, trivialmente, intercambiar sus nombres. Al contrario que el plano tangente, que resulta independiente de cualquier parametrización, ésta no determina estrictamente el sentido de la normal sino solamente su dirección. Ahora bien, fijados los parámetros "**u**" y "**v**", y elegido el sentido del producto vectorial, en los fragmentos de superficies que estamos considerando, el sentido de la normal está perfectamente determinado en cada punto.

La orientación de la superficie es consecuencia de la propia orientación del plano tangente y la orientación de éste lo es a su vez de la orientación de la base $[\underline{r}_u, \underline{r}_v]$. La orientabilidad es una propiedad topológica de las superficies que la heredan del plano, en tanto la orientación es una propiedad global de las mismas que se extiende, por lo tanto, a "toda" la superficie. Fijados los parámetros "**u**" y "**v**", las superficie son "orientables", por ejemplo, si la normal varía continuamente en toda la extensión de la superficie y por lo tanto – lo que resulta en nuestro caso equivalente – conservan el sentido a lo largo de cualquier curva cerrada que se pueda determinar sobre la misma. No obstante, todos los fragmentos de superficies cubiertos por una sola parametrización, como las que contemplamos aquí, resultan orientables.

Cualquier vector $\underline{a} \in T_P \subset \Re^3$ en un punto **P** de la superficie que, con respecto de la base general de $\Re^3$ vendrá representado por: $\underline{a} = A_1\,\underline{e}_1 + A_2\,\underline{e}_2 + A_3\,\underline{e}_3$, o sea: $\underline{a} = \{A_1, A_2, A_3\}$, podrá ser escrito respecto de la base de T_P en la forma: $\underline{a} = a_1\,\underline{r}_u + a_2\,\underline{r}_v$, así que, podemos, desde la propia superficie, representarlo por: $\underline{a} = \{a_1, a_2\}$. Trivialmente, se deberá verificar: $A_1\,\underline{e}_1 + A_2\,\underline{e}_2 + A_3\,\underline{e}_3 = a_1\,\underline{r}_u + a_2\,\underline{r}_v$. Esto supone un simple cambio de base $\Re^3 \rightarrow T_P \subset \Re^2$, una operación elemental pero muy importante para poder aplicar las formulas que posteriormente se obtendrán.

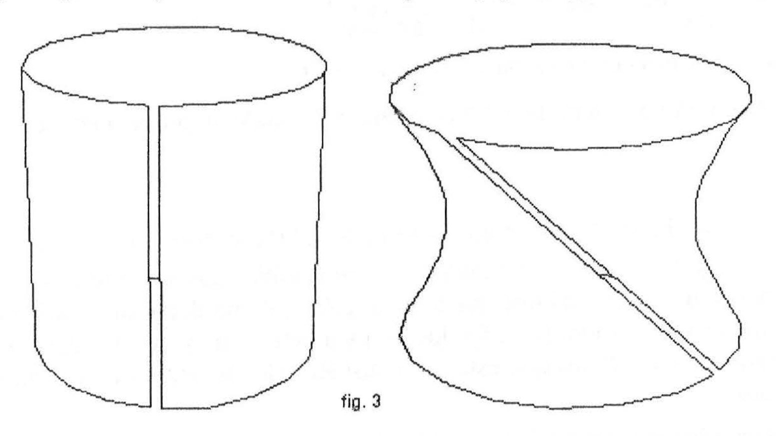
Tomando, por ejemplo, la superficie parametrizada: $\underline{\mathbf{r}}$ **(u, v)** = {**u, v,** $\mathbf{u^2 + v^2}$}, los vectores $\underline{\mathbf{r}}_u$ y $\underline{\mathbf{r}}_v$ resultan ser: $\underline{\mathbf{r}}_u$ = **{1, 0, 2u}** , $\underline{\mathbf{r}}_v$ = **{0, 1, 2 v}**. En el punto **P≡(1, 2, 5)** de esta superficie correspondiente a los valores de los parámetros **u** = **1**, **v** = **2**, –que constituyen sus coordenadas curvilíneas–, estos vectores son:
$\underline{\mathbf{r}}_u$ = **{1, 0, 2}**, $\underline{\mathbf{r}}_v$ =**{0, 1, 4}**,
así que el vector $\underline{\mathbf{a}}$=**{2, 4, 20}**, por ejemplo, puede ser también caracterizado en $\mathbf{T}_{(1,2,5)}$ por las componentes **{2, 4}**, teniendo en cuenta que:
{2, 4, 20} = 2 {1, 0, 2}+ 4 {0, 1, 4},
y podemos comprobar, por ejemplo, que otro vector tal como el $\underline{\mathbf{b}}$ = **{1, 0, 1}** no pertenece al $\mathbf{T}_{(1,2,5)}$, ya que no existe ningún par de números $\mathbf{b_1}$,$\mathbf{b_2}$ tales que verifiquen:**{ 1, 0, 1 }** = $\mathbf{b_1}$ **{ 1, 0, 2 }** + $\mathbf{b_2}$ **{ 0, 1, 4 }**.

Cuando buscamos en **P** una dirección genérica perteneciente a $\mathbf{T_P}$, podremos utilizar como dirección equivalente a cualquier otra la forma: $\underline{\mathbf{a}}$ = **{ 1, a }**. Usaremos posteriormente esta manera de precisar los vectores del plano tangente teniendo en cuenta que solamente es válida cuando $\underline{\mathbf{a}} \neq \underline{\mathbf{r}}_v$ = **{0, 1}** – que correspondería al caso **a** → ∞ –, por lo que deberemos anexar el caso excluido, en el que $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{r}}_v$, o bien, será válida en tanto se garantice la inexistencia de esta posibilidad.

§ 3.-Acerca de la curvatura.

Al hablar de la forma de una superficie nos estamos refiriendo al "cómo" y al "cuanto" está curvada en $\Re^3$ en comparación – si se quiere – con una hoja plana que es una superficie "no curvada". Cuando una hoja de una superficie se sumerge en $\Re^3$ distinguiéndose de una hoja plana se dice, en general, que se "alabea".

Antes de acercarnos al análisis o a la medida de la curvatura que es puramente local, conviene precisar algunas peculiaridades de esta transformación – este alabeo – encontrando que algunos fragmentos de superficies pueden presentar una vinculación mayor con el plano que otras. Conviene distinguir, por ejemplo, las superficies curvadas o alabeadas, en las cuales podemos establecer transformaciones, correspondencias matemáticas, físicas o elásticas, o todas las cosas a la vez, entre sus fragmentos y una región del plano. Se comprende, por ejemplo, que un cilindro circular cortado a lo largo de alguna de sus generatrices puede ser convertido en una hoja plana por simple flexión elástica, en tanto esta transformación no es posible con un hiperboloide alabeado de una hoja que necesita ser aplastado y desgarrado para convertirlo en un plano (figura 3).


fig. 3

Está el hecho de la propia flexión elástica, pero también la existencia de propiedades de medida en el plano que se conservan en la superficie curvada. En algunos casos, como en el del cilindro, no solo se pueden conservan las propiedades topológicas del plano, sino también sus propiedades métricas, lo que supone – a pesar de la incurvación – una identificación mucho mayor con el mismo desde varios puntos de vista. Es fácilmente imaginable que cualquier dibujo con curvas o con rectas y curvas delimitando regiones realizado sobre el plano puede conservarse idéntico, con las mismas propiedades métricas: longitudes, ángulos, áreas, cuando lo curvamos en un proceso natural – sin estiramientos o contracciones – convirtiéndolo en un cilindro. Estos aspectos relacionados con la "deformación", las "flexiones" o las "isometrías", inciden en otros problemas en los que estamos también interesados y de los que se hablará en el **§ 16**, pero siguen siendo, en cualquier caso, independientes de la caracterización de la forma de las superficies que es puramente local.

Independientemente de cuestiones como las anteriores, la curvatura de una superficie resulta ser un concepto local ya que si tratamos de cuantificar lo más o menos curvado de una superficie en una región amplia, deberemos evaluar inevitablemente la contribución de cada punto y su pequeña región circundante al resultado

total, puesto que esta contribución puede ser radicalmente diferente cuantitativa y cualitativamente en puntos cercanos y distintos. El resultado total de la medida de una tal incurvación "global" – extendida a todo el fragmento– no tiene interés alguno, salvo en contados casos, ya que podemos obtener este mismo resultado con formas muy diversas y completamente distintas por lo que no resulta representativa.

La medida de la curvatura "local" resultará de la comparación entre el fragmento de plano no curvado y la región curvada de la superficie en el entorno de un punto. Tenemos una magnífica referencia para la comparación entre la pequeña región curvada que rodea a un punto **P** regular y un plano general no curvado, considerando el "alabeo" de tal región con respecto a su propio plano tangente en **P**. En la figura 4 se representan diferentes configuraciones de forma en torno a diferentes puntos de superficies regulares y su comparación con los planos tangentes en esos puntos. Se comprende que esta variedad de "formas" alrededor de un punto no agota las posibilidades.

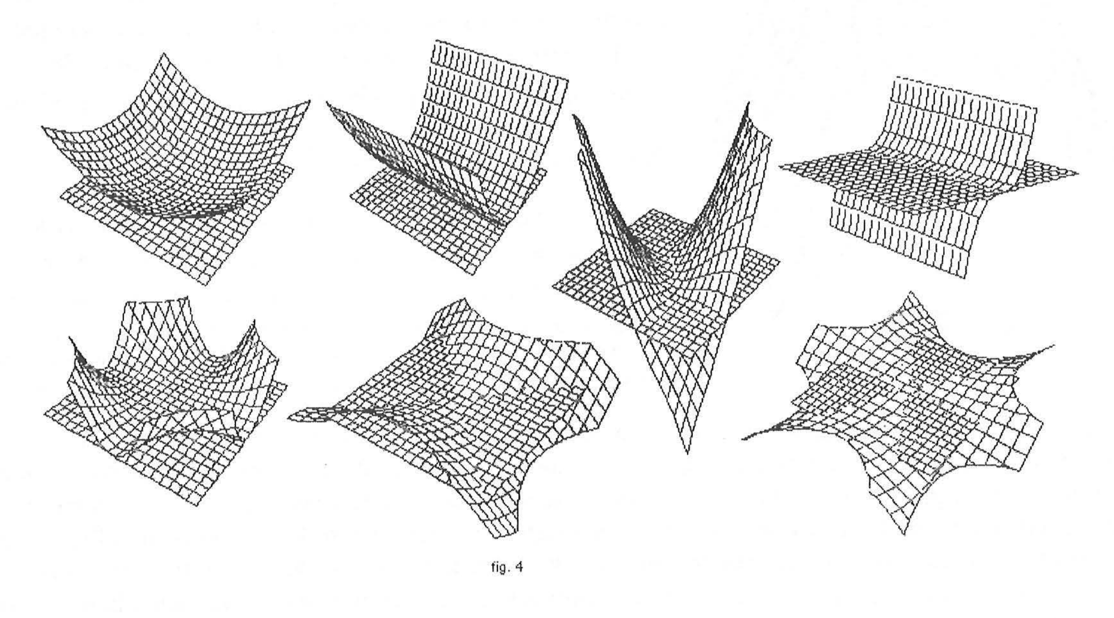


fig. 4

§ 4.-Descripción de la forma: curvaturas de secciones normales a la superficie en un punto. Curvaturas y radios de curvatura principales. Clasificación de los puntos regulares en cuanto a su forma. Indicatriz de curvatura.

La descripción completa de la curvatura de la superficie en un punto regular se puede conseguir disponiendo del conjunto de curvaturas – de flexión – de las curvas interceptadas en la superficie por planos que contienen la normal a la superficie en el punto en cuestión. Este es un conjunto de números que da una medida cuantitativa – el "cuanto"–, y si atendemos al signo de tales números, también cualitativa – el "como"–, inconfundible, de la forma de la superficie en un punto regular.

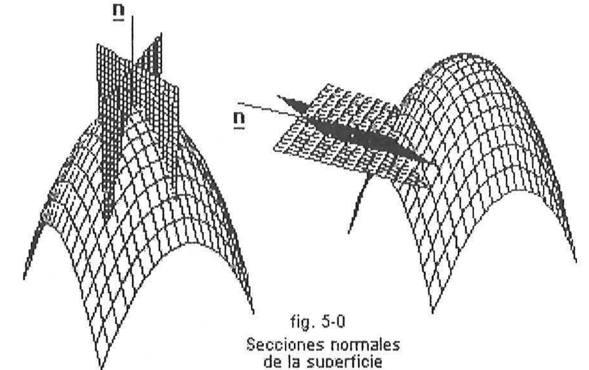


fig. 5-0
Secciones normales de la superficie

El investigar y caracterizar la forma de una superficie por intermedio de secciones por planos – curvas planas – hace que no aparezcan involucradas en el análisis más que las primeras curvaturas – de flexión – de las mismas. Puede extrañar el hecho de que estas curvaturas de flexión puedan aquí ser medidas también por números negativos pero esto se aclarará inmediatamente. En la figura 5-0 se representan distintas secciones de la superficie por planos que contienen a la normal a la superficie en distintos puntos, denominadas "secciones normales de la superficie". Por comodidad, utilizaremos en las siguientes figuras como posición estándar la de un punto, en cierto modo culminante, de un paraboloide elíptico utilizado como referencia gráfica.

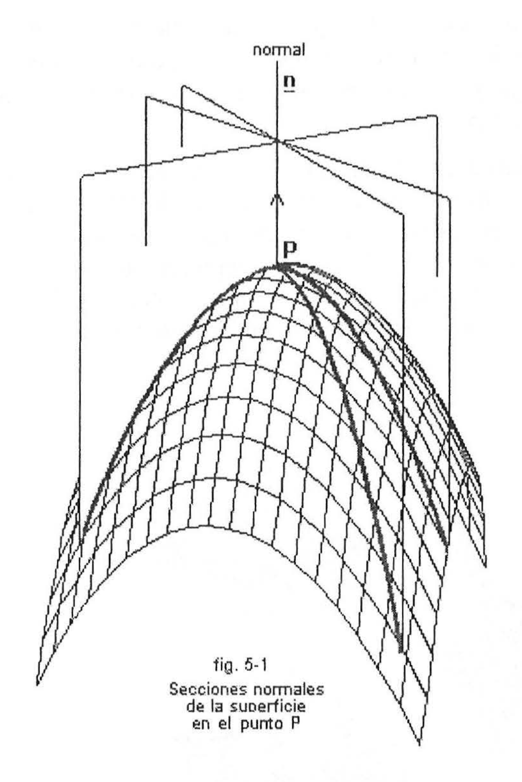


fig. 5-1
Secciones normales de la superficie en el punto P

En la figura 5-1 se precisan las curvas consecuencia de distintas secciones normales –arbitrarias– a la superficie en un punto **P**, y en la página siguiente (figura 5-2) se representa cómo las direcciones de los vectores $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, situadas en el plano tangente a la superficie en **P** definen las trazas de los planos normales (de sección) con el plano tangente $\mathbf{T_P}$. Cualquier otro vector equivalente a ellos determina, respectivamente, la misma traza y, por lo tanto, la misma sección. Estos planos normales contienen la normal $\underline{\mathbf{n}}$ a la superficie en **P** y a cada una de las direcciones $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, o, respectivamente, a cualquiera de sus direcciones equivalentes. Las correspondientes direcciones unitarias constituyen el vector tangente de cada una de las curvas –secciones normales– en **P**. En el caso, por ejemplo, de la sección definida por el vector $\underline{a}$, el vector tangente a la curva será el correspondiente vector unitario $\underline{a}_1$, identificado en alguna de las figuras como el vector $\underline{t}$: $\underline{a}_1 = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ $(= \underline{t})$

En las ilustraciones representaremos, generalmente, direcciones tales como las $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, definidas por vectores cuyos módulos $|\underline{a}|$, $|\underline{b}|$, $|\underline{c}|$, son mayores que la unidad. Los vectores tangentes $\underline{a}_1$, $\underline{b}_1$, $\underline{c}_1$, resultarán, por lo tanto, representados siempre con menor longitud. Esto es un puro convenio para facilitar la comprensión. Así mismo, hemos representado en las figuras el sentido de la normal a la superficie – vector $\underline{\mathbf{n}}$ – de manera que sea más fácil visualizarlo.

Para la caracterización de la forma son esenciales los signos de cada una de las curvaturas de las secciones normales y esto es una característica propia del estudio particular de las superficies porque normalmente consideramos que la primera curvatura de las curvas –sean planas o alabeadas– tiene siempre signo positivo. El signo de las curvaturas de las secciones normales a una superficie en un punto **P**, sin embargo, refleja solamente la relación entre el sentido elegido del vector normal a la superficie y el del vector normal principal a la curva –plana– que conserva el sentido de su concavidad. Ambos vectores, naturalmente, comparten la misma dirección en las secciones normales. Cuando, fijada una cierta parametrización, ambos vectores tienen el mismo sentido, el signo de la curvatura será positivo y cuando tengan sentidos contrarios será negativo (figura 5-3). Inicialmente no debemos preocuparnos por conocer estas posiciones relativas ya que los procedimientos de cálculo nos ofrecerán estos signos explícitamente.

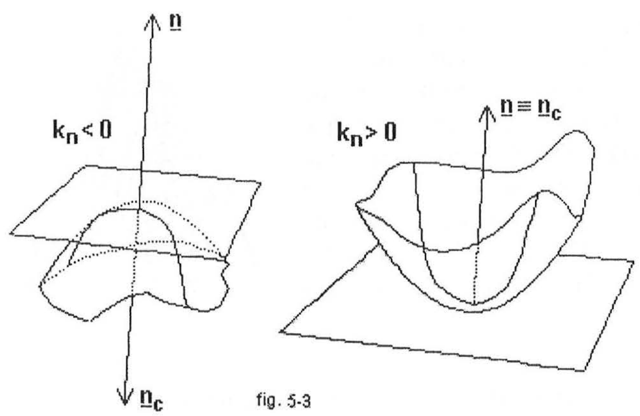


fig. 5-3

Las curvaturas – de flexión – de cada una de las secciones normales en **P** por las trazas que determinan en el plano tangente los vectores $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$,...las particularizaremos con la notación $\mathbf{k_n}(\underline{a})$, $\mathbf{k_n}(\underline{b})$, $\mathbf{k_n}(\underline{c})$,... respectivamente. Cuando nos refiramos a la curvatura de una cierta sección normal, genérica, para cualquier traza determinada por cualquier vector del plano tangente, escribiremos habitualmente $\mathbf{k_n}$ sin ninguna otra referencia.

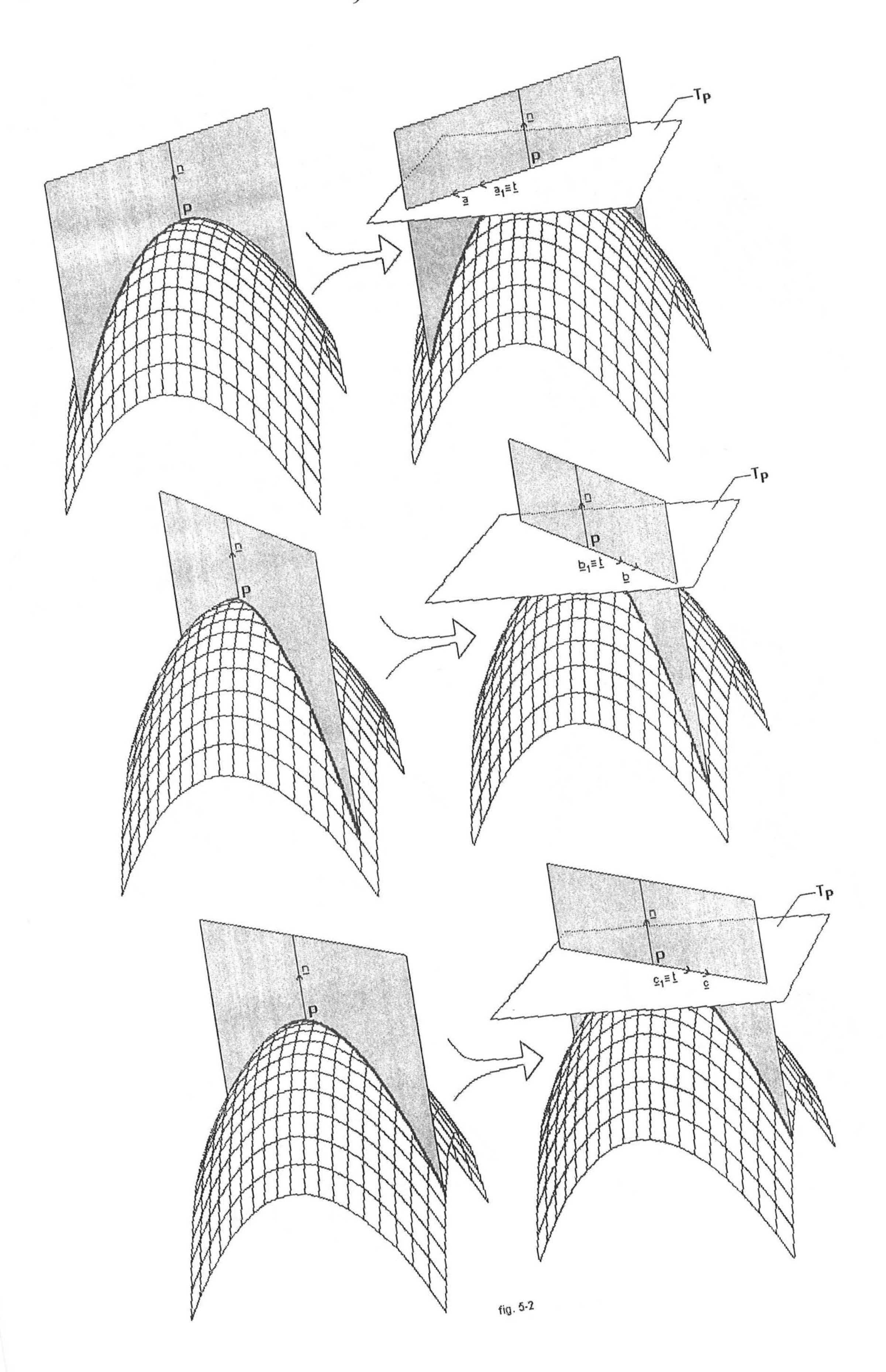


fig. 5-2

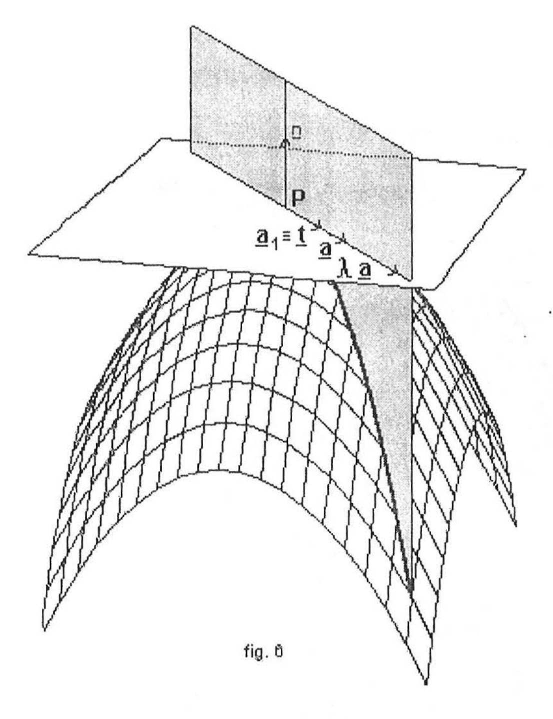


fig. 6

Se comprende que para precisar la curvatura de la sección normal en un punto **P** correspondiente a una traza definida por un cierto vector $\underline{a} \in \mathbf{T_P}$, puede utilizarse cualquier vector equivalente, incluido el vector unitario $\underline{a}_1 \equiv \underline{t}$, ya que todos estos vectores definen la misma curva intersección (figura 6), resultando: $\mathbf{k_n}(\underline{a}) = \mathbf{k_n}(\underline{a}_1) = \mathbf{k_n}(\lambda\ \underline{a})$, $\lambda \in \Re\ , \lambda \neq 0$

Podemos considerar ahora el conjunto de las curvaturas de flexión de todas las secciones normales $\mathbf{k_n}$ en un punto regular **P**. Este conjunto de números, en el caso general, tiene un máximo y un mínimo, por lo que existirán dos direcciones $\underline{\mathbf{p}}$ y $\underline{\mathbf{q}}$ llamadas **principales**, que son las direcciones en las cuales las curvaturas de las correspondientes secciones normales $\mathbf{k_n}(\underline{\mathbf{p}})$ y $\mathbf{k_n}(\underline{\mathbf{q}})$ toman estos valores extremos. Las curvaturas de cada una de las dos secciones en **P** por las trazas que definen $\underline{\mathbf{p}}$ y $\underline{\mathbf{q}}$ son las **curvaturas principales** de la superficie en el punto, que denominaremos $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$, asi que: $\mathbf{k_n}(\underline{\mathbf{p}})=\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_n}(\underline{\mathbf{q}})=\mathbf{k_2}$. En la figura 7 se completan las ilustraciones anteriores precisando las secciones normales por las direcciones principales que resultarán ser ortogonales.

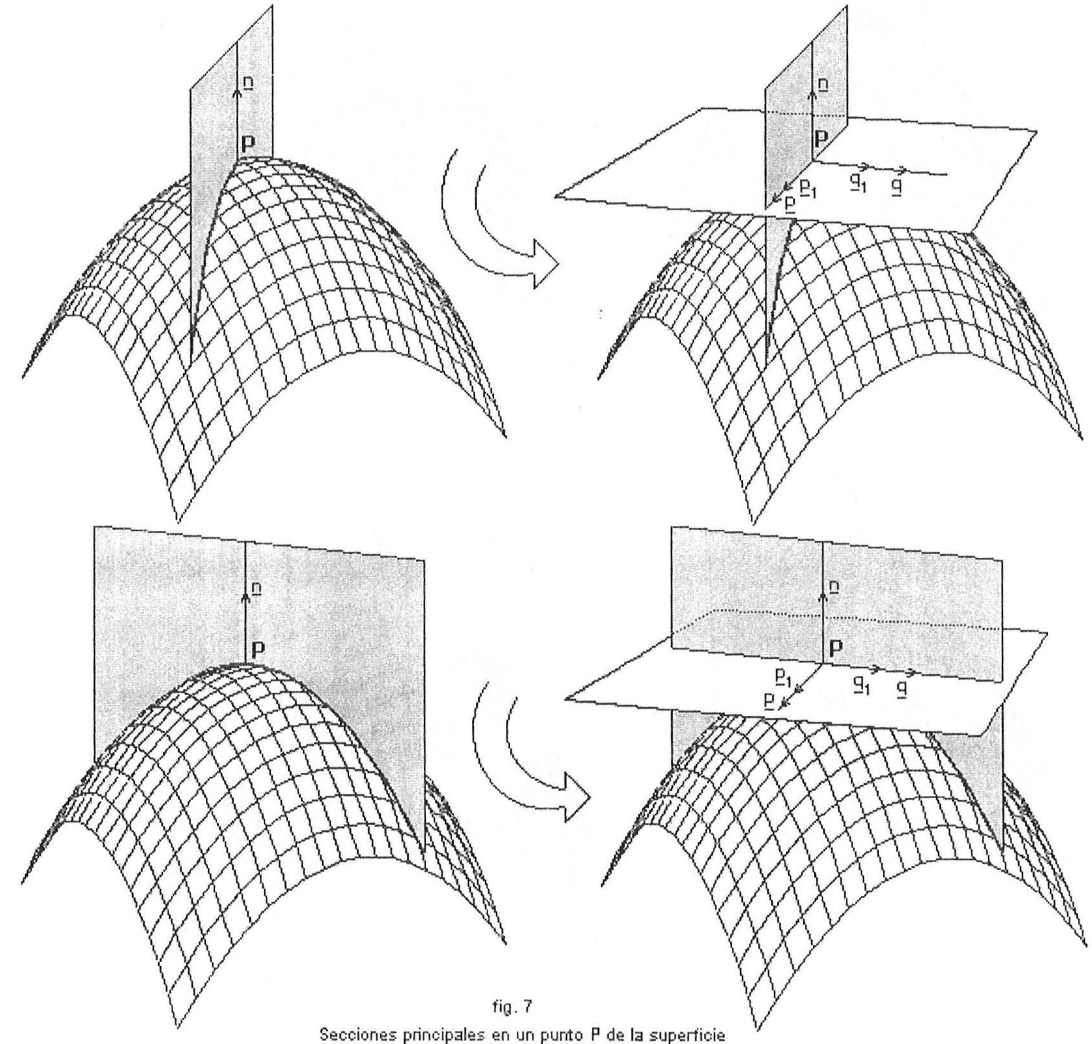


fig. 7
Secciones principales en un punto P de la superficie

El conjunto de los números que definen las curvaturas de cada una de las secciones normales k_n, puede ser agrupado en una sola fórmula, en función de un solo parámetro "θ", ángulo que forma la traza del plano de sección **a** con el plano tangente respecto a una cualquiera de las dos direcciones **p** o **q** (figura 8). Requiere, además, conocer las curvaturas principales k_1 y k_2.

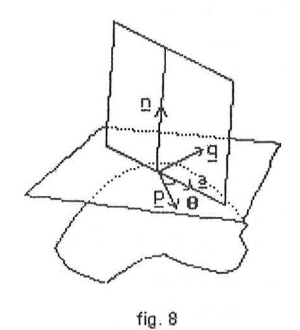


fig. 8

Como después tendremos ocasión de mostrar, la importantísima fórmula que nos permite extraer, de esta manera, todas las curvaturas de las secciones normales a una superficie en un punto, es conocida como la **fórmula de Euler**:

$$k_n = k_n(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \operatorname{sen}^2\theta, \qquad (1)$$

donde k_n representa el valor de la curvatura de la sección normal correspondiente a la dirección, determinada ahora por "θ", y donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de la superficie en tal punto según las direcciones **p** y **q**. Estas direcciones principales, en el caso general en el que están perfectamente definidas, son siempre ortogonales entre sí y por lo tanto verifican $\underline{p} \cdot \underline{q} = 0$.

Euler publica en 1761 la Memoria que contiene las propuestas fundamentales sobre el análisis de la curvatura por secciones normales en cada punto e introduce en 1771 las coordenadas curvilíneas que **Gauss** empleará de forma sistemática ("Disquisitiones generales circa superficies curvas", 1828)

Teniendo en cuenta la fórmula anterior, no será necesario manejar el conjunto entero de números que caracterizan la forma, sino tan solo disponer en cada punto de los valores de k_1 y k_2, una de las direcciones principales – **p** ó **q** – y fijar el ángulo que forma con ella la traza sobre el plano tangente del plano de sección normal.

Las direcciones principales en un punto **P** podrán venir definidas por cualquiera de sus direcciones equivalentes en el plano tangente T_P, y por lo tanto expresarse por sus dos componentes en la base $[\underline{r}_u, \underline{r}_v]$ de este plano: $\underline{p} = \{p_1, p_2\}$ y $\underline{q} = \{q_1, q_2\}$

o sea:

$$\underline{p} = p_1\,\underline{r}_u + p_2\,\underline{r}_v \quad \text{y} \quad \underline{q} = q_1\,\underline{r}_u + q_2\,\underline{r}_v,$$

o bien definirse, más sucintamente, por: $\underline{p} = \{1, \lambda_1\}$ y $\underline{q} = \{1, \lambda_2\}$,

o sea:

$$\underline{p} = \underline{r}_u + \lambda_1\,\underline{r}_v \quad \text{y} \quad \underline{q} = \underline{r}_u + \lambda_2\,\underline{r}_v,$$

siempre que ninguna de ellas coincida con $\underline{r}_v$.

Por ejemplo, en el paraboloide $\underline{r}(u, v) = \{u, v, u^2 + v^2\}$ en el que $\underline{r}_u = \{1, 0, 2u\}$ y $\underline{r}_v = \{0, 1, 2v\}$, y centrándonos en el punto **(1, 2, 5)** correspondiente a los valores de los parámetros $u = 1$, $v = 2$, se sabe que, en ese punto, las direcciones principales vienen determinadas por los vectores:

$$\underline{p} = \{-2, 1, 0\} \quad \text{y} \quad \underline{q} = \{1, 2, 10\},$$

o por cualquiera de sus equivalentes. Posteriormente tendremos ocasión de obtener estas direcciones principales a partir de su representación paramétrica. Ahora nos basta con conocerlas. Teniendo en cuenta que en tal punto los vectores $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$ son: $\underline{r}_u = \{1, 0, 2\}$, $\underline{r}_v = \{0, 1, 4\}$, las direcciones principales podrán también escribirse en la forma: $\underline{p} = \{-2, 1\}$ y $\underline{q} = \{1, 2\}$ respecto de la base del plano tangente en este punto, ya que:

$$\underline{p} = \{-2, 1, 0\} = -2\,\{1, 0, 2\} + 1\,\{0, 1, 4\} \quad \text{y} \quad \underline{q} = \{1, 2, 10\} = 1\,\{1, 0, 2\} + 2\,\{0, 1, 4\}.$$

Distintos procedimientos de cálculo – que después se verán – nos ofrecen las componentes de las direcciones principales en cada punto justamente con respecto de la base de su plano tangente, es decir: mediante dos componentes. En el ejemplo propuesto hubiéramos obtenido estas direcciones principales en la forma $\{-2, 1\}$ y $\{1, 2\}$, o cualquiera de sus equivalentes, con lo que reconstruir el vector en la base general de $\Re^3$ resulta el problema inverso:

$$\underline{p} = -2\,\underline{r}_u + 1\,\underline{r}_v = -2\,\{1, 0, 2\} + 1\,\{0, 1, 4\} = \{-2, 1, 0\}$$

$$\underline{q} = 1\,\underline{r}_u - 1\,\underline{r}_v = 1\,\{1, 0, 2\} + 2\,\{0, 1, 4\} = \{1, 2, 10\}$$

Obsérvese, además, que en este caso ambas direcciones pueden obtenerse desde la forma genérica $\{1, \lambda\}$:

$\underline{p} = \{1, -\frac{1}{2}\}$ y $\underline{q} = \{1, 2\}$, debido al hecho de que ninguna de ellas coincide con $\underline{r}_v = \{0, 1\}$.

Con las condiciones de regularidad impuestas, existe un solo caso en el cual estas direcciones principales no quedan determinadas y es aquel en el que todas las curvaturas de las secciones normales son idénticas. Los casos más evidentes corresponden a cualquier punto de una esfera, en los que $\mathbf{k_n = k_1 = k_2}$ **(≠ 0),** o al caso particular de los puntos de un plano, en los que $\mathbf{k_n = k_1 = k_2 = 0}$. A los primeros se les conoce como puntos "**umbílicos**" y a los segundos como puntos "**planos**". La esfera y el plano son las únicas superficies regulares en $\Re^3$ tales que todos sus puntos son, respectivamente, umbílicos o planos. Sin embargo, es usual encontrarnos con superficies en las que estando, en general, las direcciones principales perfectamente determinadas, coexisten puntos aislados o conjuntos de puntos en los que no se da esta circunstancia.

Ocurre, entre otras cosas, que en determinado tipo de superficies cerradas pueden existir al menos dos puntos umbilicales; los elipsoides y los hiperboloides de dos hojas pueden tener, por ejemplo, cuatro puntos umbílicos aislados **(Monge)** y los paraboloides elípticos dos. En la figura 9a están representados otros casos comunes: el paraboloide elíptico de revolución $\{\mathbf{u\ cos\ v,\ u\ sen\ v,\ u^2}\}^{(1)}$ que tiene un solo punto umbílico; el domo de meridiano parabólico $\{\mathbf{(2-u^2)\ cos\ v,\ (2-u^2)\ sen\ v,\ u}\}^{(2)}$ que tiene, en la región representada, una circunferencia – un paralelo que no es el ecuador – toda ella de puntos umbílicos; la "silla de mono" $\{\mathbf{u,\ v,\ u^3 -3\ u\ v^2}\}^{(3)}$ que tiene un solo punto plano y el conoide de directriz cúbica $\{\mathbf{u,\ v\ u^3,\ 1-v}\}^{(4)}$ que tiene una generatriz – el eje **OZ** – toda ella de puntos planos, por citar solamente algunos ejemplos.

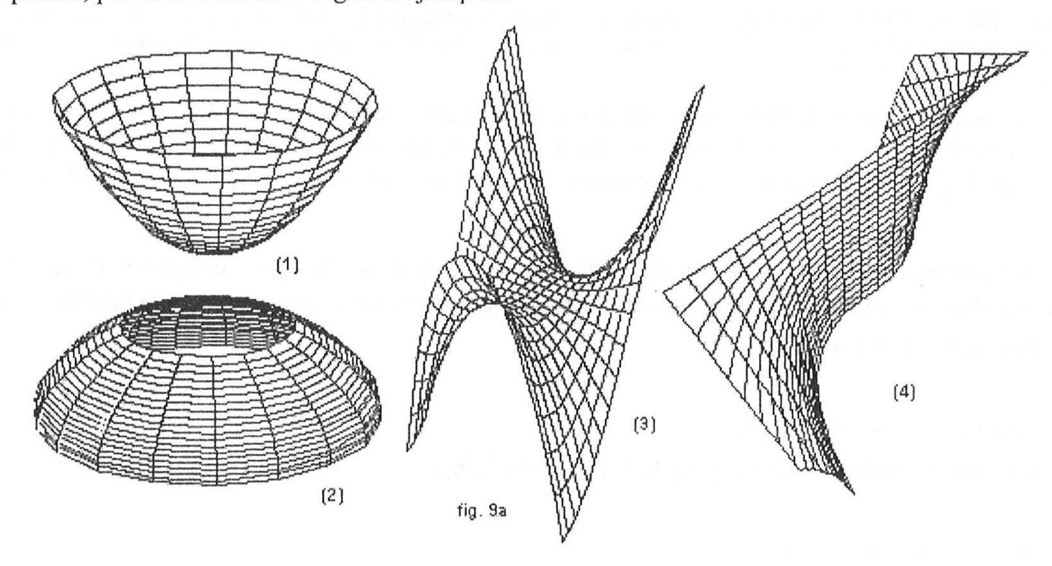
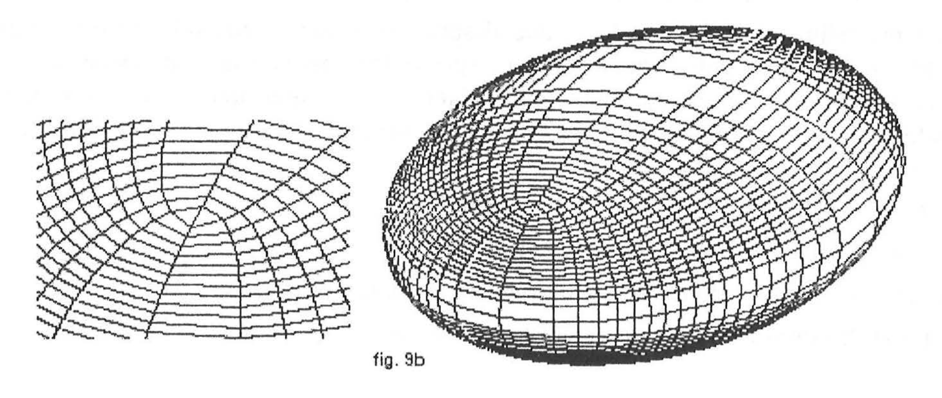


fig. 9a

Sabemos que las líneas de curvatura principal de una superficie regular – de las que después hablaremos – son las curvas integrales de las direcciones principales, es decir, las curvas trazadas sobre la superficie tales que sus tangentes en cada uno de sus puntos tienen la dirección de $\underline{\mathbf{p}}$ o de $\underline{\mathbf{q}}$. Parece apropiado pensar que si consideramos la superficie representada por el conjunto de tales curvas, los puntos umbílicos o planos aislados, en los que las direcciones principales no están determinadas o, si se quiere, que cualquiera de sus direcciones es, en cierto modo, principal, deberán presentar algún tipo de comportamiento singular respecto a estas congruencias. Aquí conviene hacer una distinción entre los puntos umbílicos y los planos. La disposición relativa de las líneas de curvatura respecto de los umbílicos aislados se manifiesta de diferentes maneras (**Darboux**), pero en cualquier otra representación paramétrica pueden pasar completamente inadvertidos en una primera inspección; lo mismo ocurre cuando estos puntos se agrupan a lo largo de líneas de la superficie. En la figura 9b se representa un elipsoide referido a sus líneas de curvatura con la disposición **I** de **Darboux** alrededor de cualquiera de sus umbilicales.


fig. 9b

Contando con los resultados clásicos de **Monge, Gauss,** o **Dupin**, e incluyendo resultados de sus contemporáneos como **Bertrand, Bonet** y muchos otros, **Darboux** escribió, a su manera, un tratado completo sobre Geometría Diferencial (Infinitesimal) entre 1887 y 1896 que se resumió en 4 volúmenes y que incluía la mayor parte de todos sus trabajos anteriores. Las referencias anteriores intercaladas corresponden, por una parte, a estas "Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitesimal", vol IV, note 07: *Sur la forme del lignes de courbure dans la voisinage d'un ombilic*, 1896, y su referencia a **A. Cayley** *On differential Equations and umbilici,* Phil. Magazine, XXVI, 1863, y por otro lado, a **Gaspard Monge**, "*Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide*", Journal de l'Ecole Polytechnique, cah. II. 1796.

Según la fórmula $_{(1)}$, basta por lo tanto con conocer $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$ y p ó q en cada punto para conocer todo el espectro de curvaturas $\mathbf{k_n}$. Las curvaturas principales y las direcciones de curvatura principal son, por otra parte, los autovalores y autovectores de un cierto endomorfismo ℓ definido en cada plano tangente –del que también hablaremos después–, así que su cálculo punto a punto resulta rutinario si se dispone de la matriz £ de ℓ.

Las curvaturas principales $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$ resultan ser, por lo tanto ,un índice de la forma de la superficie en cada punto. Alternativamente, se utilizan, con algunas ventajas, otros índices, como su producto: **curvatura total** de la superficie en un punto o curvatura **de Gauss**: $\mathbf{k_T = k_1 \, k_2}$, y su valor promedio: **curvatura media** de la superficie en un punto $\mathbf{k_m} = \frac{1}{2} (\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2})$.

Se acostumbra a clasificar cualitativamente los puntos de una superficie observando el valor de $\mathbf{k_T}$, resultando, básicamente, tres cualidades de forma local que constituyen las variantes posibles de lo que podíamos denominar "formas básicas regulares". Son los puntos "**elípticos**", en los cuales $\mathbf{k_T > 0}$, los puntos "**parabólicos**" en los que $\mathbf{k_T = 0}$, y los puntos "**hiperbólicos**", en los que $\mathbf{k_T < 0}$. Sus características y peculiaridades se describen en cualquier texto de Geometría Diferencial. Se comprende que para esta clasificación no es necesario conocer estrictamente las dos curvaturas principales sino tan solo el signo de $\mathbf{k_T}$ o su valor nulo y, en último caso, si las curvaturas principales son iguales o no lo son. Quiere esto decir que para la clasificación de los puntos vamos a disponer de algunas otras alternativas de cálculo diferentes del conocimiento de los valores exactos de las curvaturas principales.

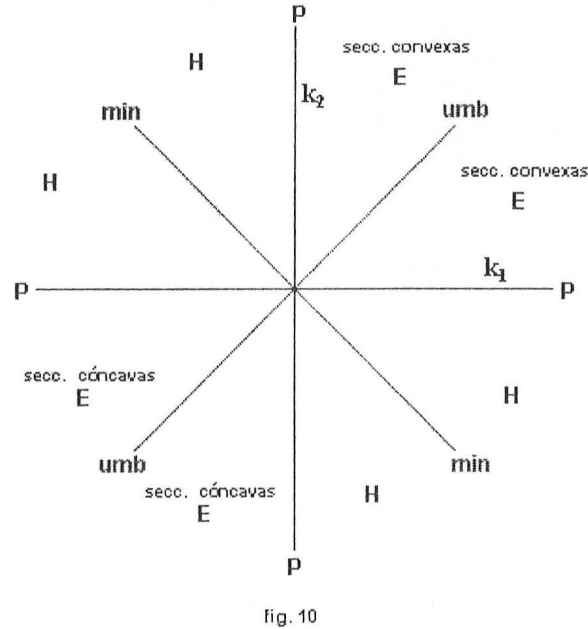


fig. 10

A los puntos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, y a los umbílicos o planos, cabe añadir el caso en que las curvaturas principales satisfagan $\mathbf{k_1} = - \mathbf{k_2}$, puntos hiperbólicos en los que la curvatura media es nula, que denominaremos "**minimales**". Estos puntos se citarán en el **§ 11** y sobre las superficies cuyos puntos son todos minimales se hablará en el **§ 17**. Con lo dicho, podemos representar la forma local de los diferentes puntos de un fragmento de superficie en un plano cuyas coordenadas cartesianas sean las curvaturas principales tal y como se representa en la figura 10, lo que constituye un mapa de la forma local en la región de superficie considerada. Los puntos parabólicos se situarán sobre cualquiera de los ejes exceptuando el origen donde deberá situarse cada punto plano. Los umbílicos y los minimales deberán quedar situados sobre las bisectrices de los cuadrantes. El resto deberán situarse sobre una de las correspondientes ocho regiones según los valores de las curvaturas $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$.

Este catálogo de formas regulares fundamentales en la práctica presenta diferentes variantes aparentes según la relación cualitativa de cada punto con los de su entorno, con lo que se enriquecen las posibilidades de diferenciación. Las variantes pueden ponerse de manifiesto de diferentes maneras o abordarse bajo diferentes criterios. Puede observarse, entre otros medios de exploración, si la superficie atraviesa su propio plano tangente o si queda a uno solo de sus lados, o bien si la superficie contiene rectas que pasan por el punto en cuestión, etc.

En principio, debido a las condiciones de regularidad impuestas, si una superficie comparte regiones de puntos elípticos ($\mathbf{k_T > 0}$) y regiones de puntos hiperbólicos ($\mathbf{k_T < 0}$), ambas deberán estar separadas por líneas frontera de puntos, en general, parabólicos ($\mathbf{k_T = 0}$), que denominamos **líneas parabólicas o nodales** (figura 11), y eventualmente por líneas de puntos planos.

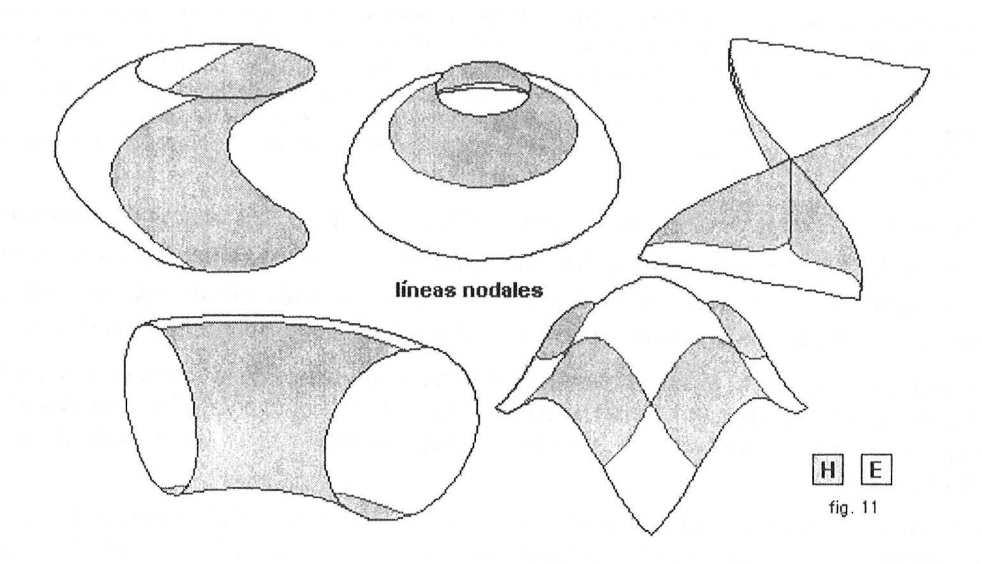


fig. 11

Sin embargo, en regiones todas ellas de puntos elípticos o hiperbólicos pueden coexistir puntos parabólicos o puntos planos aislados, lo que no contradice el principio de continuidad de k_T. Esto permite otras posibilidades interesantes desde el punto de vista formal. En las figuras 12 y 13, se representan algunos ejemplos ilustrativos.

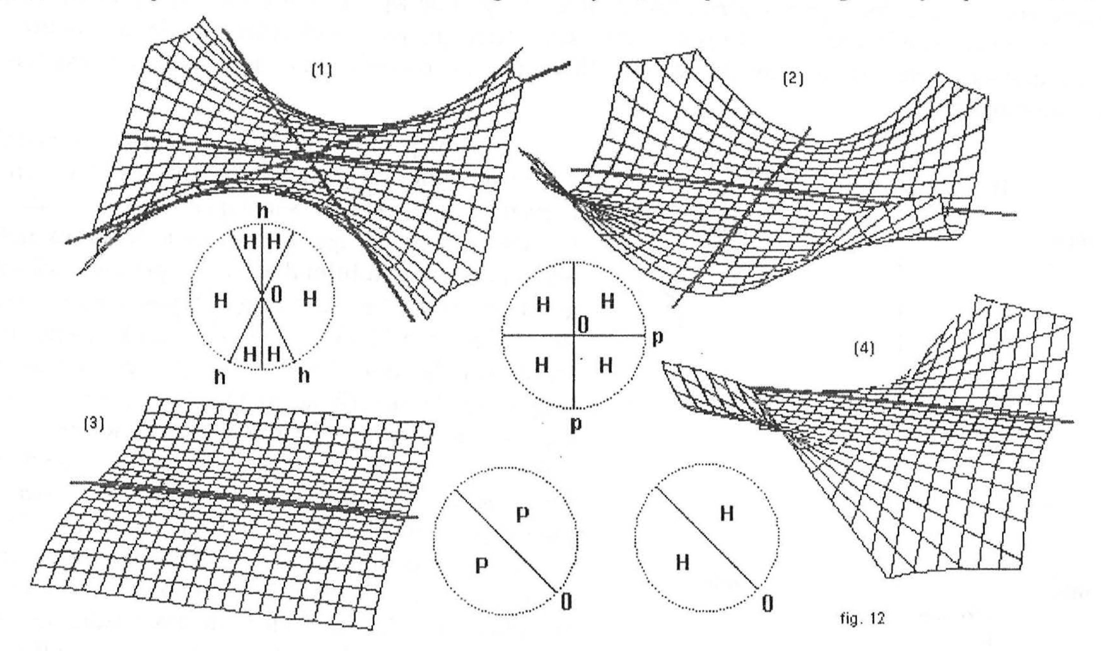


fig. 12

En la figura 12 se representa la superficie **{u, v, u^3–3 u^2 v}**$^{(1)}$ en la que todos los puntos son hiperbólicos (**H**) excepto el origen de coordenadas que es un punto plano (**O**). La superficie contiene, además, tres rectas que pasan por **(0,0,0)**: son las rectas **($\sqrt{3}$v, v, 0)**, **(–$\sqrt{3}$v, v, 0)** y el eje **OY**, todas ellas de puntos hiperbólicos (**h**), salvo su intersección común. La superficie queda a ambos lados de su plano tangente en el origen que es el **z =0** y que contiene a las tres rectas. En la superficie **{u, v, u^2 v^2}**$^{(2)}$, el origen es, así mismo, el único punto plano (**O**); la superficie queda a un solo lado de su plano tangente en **(0,0,0)** que es el **z = 0**, y que tiene en común con la misma las únicas dos rectas de la superficie – ejes **OX** y **OY** – todas ellas de puntos parabólicos (**p**); exceptuando su intersección, todos los demás puntos de la superficie son hiperbólicos (**H**). Cuando las superficies son regladas las situaciones posibles se simplifican algo, ya que aquí no existen puntos elípticos. En el cilindro **{u, v, u^3}**$^{(3)}$, de la misma figura 12, el eje **OY** es la única generatriz de puntos planos (**0**), en tanto todos los demás son, trivialmente, puntos parabólicos (**P**), y en el conoide **{u, 1-v, u^3 v}**$^{(4)}$, la única generatriz de puntos planos (**O**) es el eje **OY**, que se encuentra rodeado de puntos hiperbólicos (**H**) que son todos los demás, así que en esta superficie reglada no hay estrictamente generatrices de puntos parabólicos.

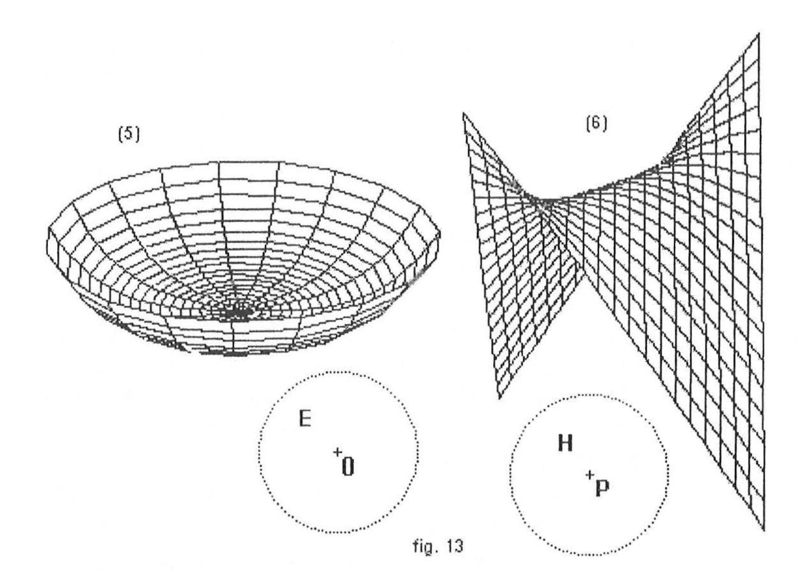


fig. 13

En los dos ejemplos representados en la figura 13 no existen rectas contenidas en las superficie. La superficie de revolución: **{u cos v, u sen v, u^4}**(5) tiene un único punto plano aislado (**O**), que está rodeado de puntos elípticos (**E**), y la superficie: **{u, v, cos u + cos v + u v}**(6), tiene uno de sus puntos parabólicos aislados (**P**), el **(0,0,2)**, inmediatamente rodeado de puntos hiperbólicos (**H**). Esto resulta completamente independiente de que en la representación de la superficie de revolución el punto aparezca como singular puesto que no es una singularidad vinculada a su forma.

Si, como se dijo anteriormente, nos mantenemos dentro de un fragmento regular de una superficie recorriéndola a través de un itinerario, se puede hablar de mirar a nuestro alrededor, desde cada punto de este camino, sobre la superficie, y observar paisajes elípticos, parabólicos o hiperbólicos y, como mucho, de paisajes planos. Estos "paisajes" pueden ir cambiando a lo largo del itinerario elegido pero, con las condiciones impuestas, no pueden cambiar bruscamente sino ir transformándose con continuidad: las lomas o valles que observamos a nuestro alrededor pueden ir creciendo o descendiendo poco a poco hasta desaparecer y cambiar de sentido, las mesetas o las vaguadas pueden ir deformándose y cambiando suavemente...etc., todo ello como si de un recorrido por la geografía terrestre se tratara pero con formas siempre suaves – regulares –. Las líneas nodales de la figura 11 eran líneas de frontera, de transición de paisajes siempre elípticos a paisajes siempre hiperbólicos, con posibles variantes en puntos aislados.

Las múltiples combinaciones, punto a punto, en la práctica ilimitadas, de estas formas básicas más los principios de continuidad y conexión nos permiten imaginar una extraordinaria cantidad de modelos muy variados con características globales muy diferentes entre sí. Los recortes introducidos por los valores de los parámetros nos permitirán delimitarlas de maneras diferentes y por último, pueden, además, acoplarse entre sí por líneas coincidentes – que conservan, con diferentes órdenes, las diferentes propiedades de tangencia o de forma – configurando "variedades" de mayor complejidad.

En las formulaciones de aplicación de las condiciones de forma – geométricas – de las superficies, se utilizan, con alguna ventaja, no los valores numéricos mismos de las curvaturas, sino sus inversos $\mathbf{R_n = 1/k_n}$, que son denominados "**radios de curvatura** de las secciones normales". Los radios de curvatura principal, por ejemplo, serán los valores: $\mathbf{R_1 = 1/k_1}$ y $\mathbf{R_2 = 1/ k_2}$. Estos valores aparecen inevitablemente, por ejemplo, en el análisis de los esfuerzos sobre láminas o cascarones o en las ecuaciones de equilibrio interno de las membranas, representando los condicionantes de la forma geométrica.

Por otro lado, sabemos que cualquier curva plana en las proximidades de un punto puede aproximarse por un arco de circunferencia – osculatriz – en su propio plano, que reproduce propiedades de tangencia y de forma. En cada punto **P**, esta circunferencia tiene como radio, el radio de curvatura de la curva y su centro es el denominado "centro de curvatura" de la curva, que está situado sobre su normal en **P** por el lado de su concavidad.

Teniendo en cuenta lo anterior, cada una de las formas cualitativas básicas regulares de los puntos, pueden representarse esquemáticamente por los diagramas siguientes, representados en la figura 14:

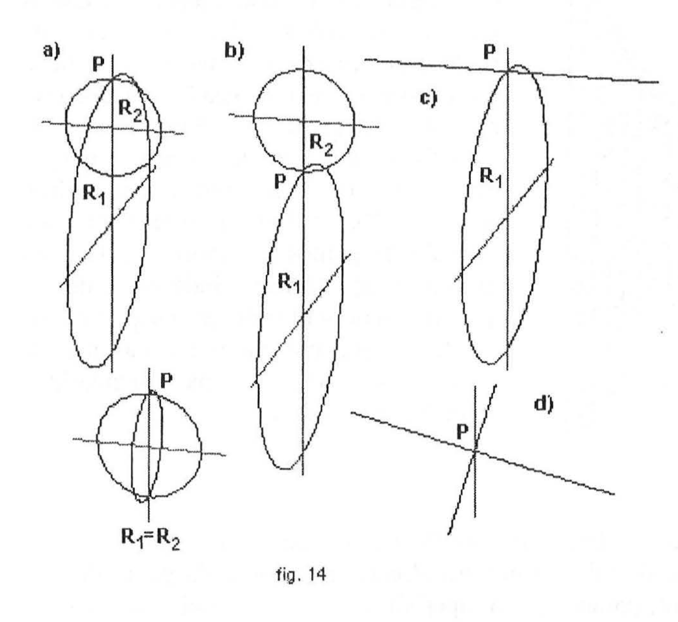


fig. 14

a).- Dos circunferencias, con el punto **P** común, en planos perpendiculares, con sus centros alineados sobre su intersección, radios $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$, finitos, a un mismo lado del plano tangente para los puntos elípticos. Si $\mathbf{R_1} = \mathbf{R_2}$, resulta un punto umbílico, cualquier par de circunferencias con su centro y el punto **P** común en cualquier par de planos ortogonales entre sí nos representa un punto umbilical.

(b).- Dos circunferencias, con el punto **P** común, en planos perpendiculares con sus centros alineados sobre la traza de los planos, con radios $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$, cada una de ellas a un lado del plano tangente para los puntos hiperbólicos.

(c).- Una circunferencia con radio **R** y una recta –circunferencia de radio "infinito"– en el propio plano tangente perpendicular al plano de la circunferencia y con el punto **P** común con ella, para los puntos parabólicos.

(d).- Dos rectas cualesquiera perpendiculares en el plano tangente con el punto **P** común, para los puntos planos.

Finalmente, en cada punto **P**, el conjunto de las curvaturas de las secciones normales puede ser representado gráficamente, de distintas maneras, sobre el propio plano tangente a la superficie en **P**, constituyendo una "indicatriz de curvatura". La **indicatriz de Dupin** es una curva plana – una cónica – que presenta, desde diferentes puntos de vista, notabilísimos vínculos con la forma local de la superficie, (figura 15), y a partir de la cual podemos introducir en la superficie algunas nociones interesantes propias de las cónicas como por ejemplo el de las direcciones conjugadas e incluso – si se quiere – el de las direcciones asintóticas. Además, estas cónicas, referidas a las direcciones principales en cada punto, se presentan analíticamente de forma muy sencilla – con sus ecuaciones reducidas – en función de los radios de curvatura principales.

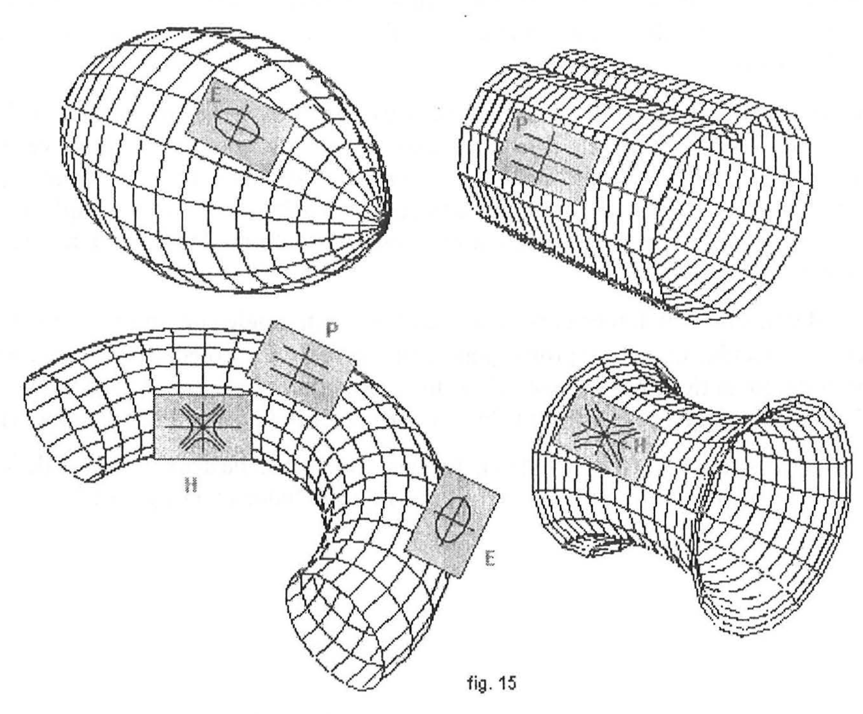


fig. 15

En los puntos elípticos tal curva es una elipse de ecuación

$$|\mathbf{k_1}|\ \mathbf{X}^2 + |\mathbf{k_2}|\ \mathbf{Y}^2 = \mathbf{1},$$

que se convierte en una circunferencia en los puntos umbílicos: $|\mathbf{k}|(\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2) = \mathbf{1}$, con $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k_1}| = |\mathbf{k_2}|$.

En los puntos parabólicos la cónica degenera en dos rectas paralelas:

$|k_1| X^2 = 1$ ó bien $|k_2| Y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad X = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_1|}}$ ó bien $Y = \pm \frac{1}{\sqrt{|k_2|}}$.

En los puntos hiperbólicos la indicatriz se convierte en dos hipérbolas conjugadas:

$|k_1| X^2 - |k_2| Y^2 = \pm 1,$

En los puntos planos se singulariza en el propio punto **P**. No existe estrictamente indicatriz.

Después de introducir – explícitamente – la segunda forma cuadrática fundamental, que nos permitirá resumir, en una sola cosa, el gobierno del conjunto de curvaturas de las secciones normales y por lo tanto el gobierno de la forma de la superficie en cada punto, tendremos ocasión de volver sobre esta indicatriz para describirla matemáticamente desde otro punto de vista estrictamente formal.

§ 5.-Curvaturas de flexión de curvas cualesquiera sobre la superficie.

Según lo visto anteriormente, conocer las curvaturas y direcciones principales de la superficie en un punto **P** nos permite conocer la curvatura de cualquier sección normal, fijándola adecuadamente con respecto a una de las direcciones principales. Dos resultados más, nos permiten ahora extender este análisis al cálculo de la primera curvatura de cualquier curva trazada sobre la superficie en **P**. Ambos son, en realidad, variantes de un solo resultado que describiremos inmediatamente después.

El primero de estos resultados muestra la relación de curvaturas en un punto **P** entre una sección normal y una oblicua que pasa por la misma traza sobre $\mathbf{T_P}$ (figura 16), es decir, tales que ambas secciones tengan la misma recta tangente. Esta relación está dada por la fórmula:

$\mathbf{k_o \cos \varphi = k_n},$

donde $\mathbf{k_o}$ y $\mathbf{k_n}$ son las curvaturas de las secciones oblicua y normal, respectivamente, ambas pasando por la misma tangente y donde φ es uno de los dos ángulos – suplementarios – que determinan ambos planos. Este resultado constituye,básicamente, el teorema de **Meusnier** que, por otra parte, puede enunciarse geométricamente de diferentes maneras. Este teorema tiene, con carácter general, una limitación básica que posteriormente podrá comprenderse mejor: la traza de sección sobre el plano tangente en un punto no puede ser una dirección asintótica – real –.

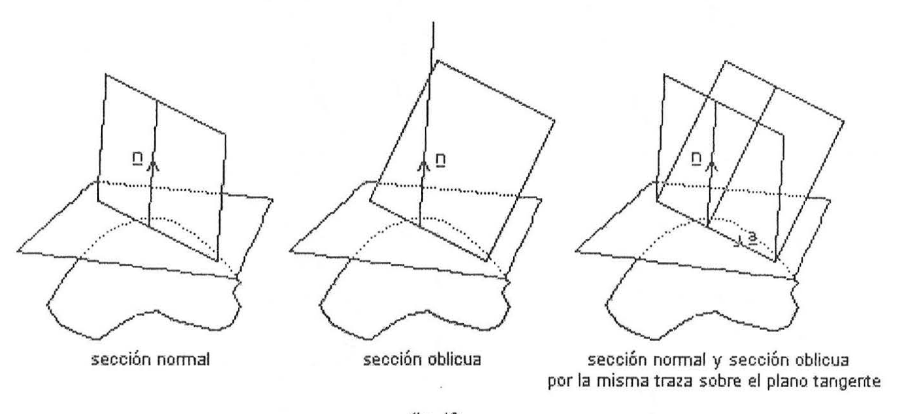


fig. 16

El resultado expresado así, muestra una relación de cantidades, independientemente de su signo, por lo que es indiferente el ángulo φ que tomemos entre los dos planos. Para incorporar el signo, por lo dicho anteriormente, tenemos que introducir la normal a la superficie $\underline{\mathbf{n}}$ ya que es su posición relativa con respecto a la concavidad de la curva lo que nos determina el mismo. Si $\mathbf{k_n}$ tiene ya su propio signo entonces la igualdad anterior puede precisarse introduciendo $\varphi = \angle(\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{n}}_c)$, ángulo que forma el vector normal a la superficie $\underline{\mathbf{n}}$ y el vector normal principal de la sección oblicua $\underline{\mathbf{n}}_c$ en el punto **P**. La fórmula puede escribirse ahora:

$\mathbf{k_o \cos(\underline{n}, \underline{n}_c) = k_n}.$

El segundo resultado tiene un ámbito más general ya que afecta a cualquier curva regular – en general, alabeada – trazada sobre la superficie en un punto **P**. Puede enunciarse de la siguiente manera:

"La curvatura de flexión de cualquier curva regular trazada sobre la superficie en un punto **P** de la misma es igual a la curvatura en **P** de la sección de la superficie por el plano osculador de la curva en **P** ".

Es decir: **k** (cualquiera) = $\mathbf{k_o}$ (por su plano osculador)

Este resultado permite reducir el estudio de la primera curvatura de cualquier curva sobre una superficie al cálculo de la curvatura de secciones planas que, en general, serán oblicuas y excepcionalmente normales. Después, la relación entre las curvaturas de las secciones oblicuas y normales nos permite reducir todas al cálculo de éstas últimas:

$\mathbf{k_o \cos \varphi = k_n}$ ó bien $\mathbf{k_o \cos (\underline{n}, \underline{n}_c) = k_n}$,

y, finalmente, expresar la curvatura de cualquier sección normal con respecto a las principales, según $_{(1)}$:

$\mathbf{k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \,sen^2 \theta}$,

con lo que la curvatura de flexión de cualquier curva sobre la superficie en un punto **P** puede expresarse por las curvaturas principales de la superficie en **P** conociendo los ángulos "θ" y "φ":

$\mathbf{k \ \cos \varphi = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \,sen^2 \theta}$

La figura 17 describe el paso de una curva cualquiera a su sección oblicua y de ahí a su sección normal todas ellas con la misma tangente y representa los dos ángulos: "φ" que sitúa el corte de la sección oblicua y "θ" entre secciones normales con respecto a una de las direcciones principales.

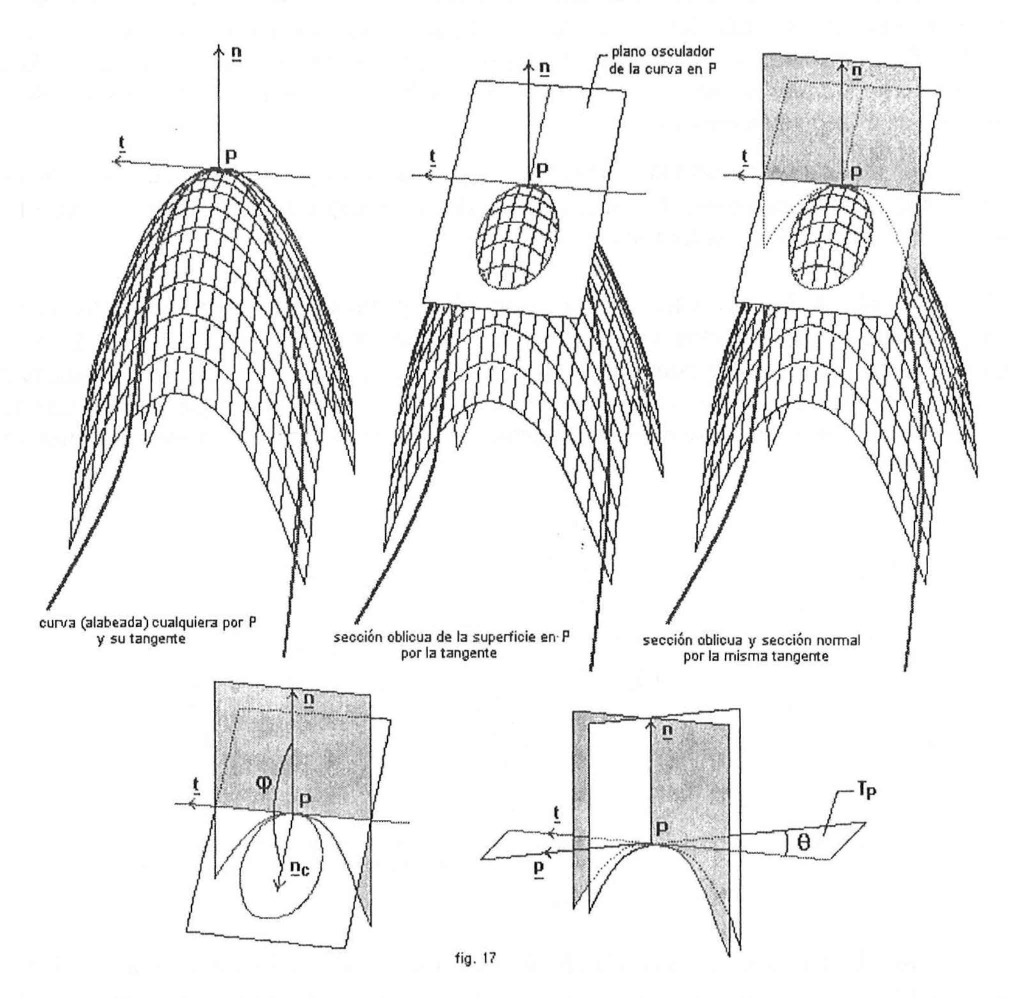


fig. 17

Queda fuera del alcance de este trabajo el examen de la curvatura de cualquier curva que no sea consecuencia de secciones normales que son las que nos permiten, como se ha visto, describir y caracterizar localmente la forma de la superficie. La descripción de las propiedades de las componentes tangenciales de los vectores curvatura de cada curva sobre la superficie está vinculado a otro tipo de problemas – como el de las geodésicas, entre otros – en los que aquí no entramos. Lo que se ha dicho equivale a que las secciones oblicuas por la misma tangente conservan la misma curvatura normal (proyección del vector curvatura sobre la normal a la superficie) en tanto la curvatura tangencial o geodésica (proyección del vector curvatura sobre el plano tangente) es la que varía.

§ 6.-Análisis vectorial de las curvaturas de flexión de curvas sobre la superficie.

Lo anterior nos muestra que el estudio de la curvatura de flexión de cualquier curva sobre la superficie se puede reducir al estudio de la curvatura de la correspondiente sección normal que pasa por la misma tangente. Describiremos ahora un resultado general que abarca los anteriores y que gobierna, básicamente, todo el estudio de las curvaturas de flexión de las curvas sobre la superficie.

Consideraremos la superficie parametrizada $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}(\mathbf{u},\mathbf{v}), \mathbf{y}(\mathbf{u},\mathbf{v}), \mathbf{z}(\mathbf{u},\mathbf{v})\}$. Una curva sobre esta superficie podrá representarse definiendo, por ejemplo, cualquiera de las relaciones:

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{v})$ ó bien $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u})$,

resultando la parametrización:

$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = \{\mathbf{x}(\mathbf{u}(\mathbf{v}),\mathbf{v}), \mathbf{y}(\mathbf{u}(\mathbf{v}),\mathbf{v}), \mathbf{z}(\mathbf{u}(\mathbf{v}),\mathbf{v})\} = \underline{\mathbf{r}}^*(\mathbf{v})$, o bien la:

$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u})) = \{\mathbf{x}(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u})), \mathbf{y}(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u})), \mathbf{z}(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u}))\} = \underline{\mathbf{r}}^*(\mathbf{u})$,

en función de uno de los dos parámetros "**u**" o "**v**" de la superficie.

Siempre que sea posible y adecuado, utilizaremos preferentemente una de estas dos maneras de determinar curvas sobre la superficie; sin embargo contemplamos una forma más general de determinar la curva – que incluye las anteriores –, definiéndola mediante las dos relaciones:

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta), \mathbf{v} = \mathbf{v}(\theta)$,

en función de un tercer parámetro "**θ**" independiente, lo que nos proporcionará la representación paramétrica más general:

$\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}(\theta), \mathbf{v}(\theta)) = \{\mathbf{x}(\mathbf{u}(\theta),\mathbf{v}(\theta)), \mathbf{y}(\mathbf{u}(\theta),\mathbf{v}(\theta)), \mathbf{z}(\mathbf{u}(\theta),\mathbf{v}(\theta))\} = \underline{\mathbf{r}}^*(\theta)$.

Suponiendo que la curva viene determinada de esta última manera, en cada uno de los puntos **P** de la curva sobre la superficie, el vector que define la dirección de su tangente podrá ser expresado por:

$$\dot{\underline{\mathbf{r}}}^* = \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{u}}\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} + \frac{\partial \underline{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{v}}\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} = \dot{\mathbf{u}}\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}}\ \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}},$$

que es un vector que pertenece a $\mathbf{T_P}$. Sus componentes con respecto a la base $[\underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{r}}_{\mathbf{v}}]$ son, por lo tanto $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\mathbf{v}}$, y el vector puede representarse por $\dot{\underline{\mathbf{r}}}^* = \{\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{v}}\}$.

Nos interesaremos ahora por el vector normal a la superficie $\underline{\mathbf{n}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ en cada uno de los puntos de la curva sobre la misma:

$\underline{\mathbf{n}}\,(\mathbf{u}(\theta), \mathbf{v}(\theta)) = \underline{\mathbf{n}}^*(\theta)$.

Al ser $\underline{\mathbf{n}}$ un vector que se conserva unitario, su variación total estará, así mismo, sobre el plano tangente $\mathbf{T_P}$ en cada uno de los puntos **P** de la curva, y además:

$$\dot{\underline{\mathbf{n}}}^* = \frac{\partial \underline{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{u}}\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} + \frac{\partial \underline{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{v}}\frac{d\mathbf{v}}{d\theta} =$$

$$= \dot{\mathbf{u}}\ \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{v}}\ \underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}}$$

Así pues, los vectores $\dot{\underline{\mathbf{n}}}^*$ y $\dot{\underline{\mathbf{r}}}^*$ se encuentran sobre el plano tangente a la curva en cada punto de la superficie (figura 18).

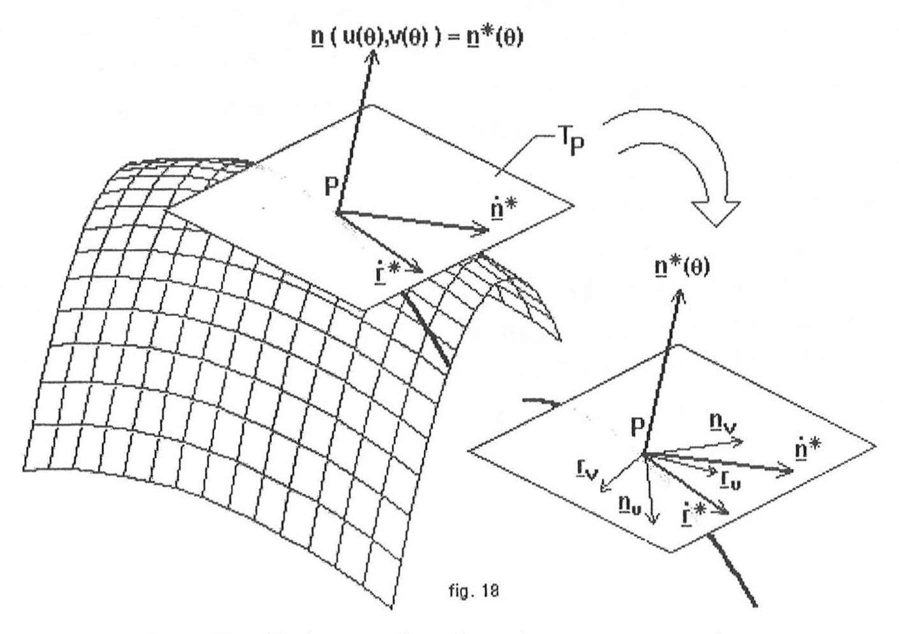


fig. 18

Trivialmente, los vectores $\underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{u}}$ y $\underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}}$ están en $\mathbf{T_P}$. Nada garantiza, sin embargo, que estos dos vectores $\underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{u}}$ y $\underline{\mathbf{n}}_{\mathbf{v}}$ no puedan anularse individualmente, o que, siendo no nulos, sean equivalentes, por lo que no pueden ser

tomados como una base alternativa para $\mathbf{T_P}$ en un caso general. De hecho, su anulación o su dependencia lineal –en su caso– nos dará cierta información sobre distintos trazados en la superficie y hasta información sobre la misma superficie. No nos detendremos más, por el momento, en las particularidades de este nuevo par de vectores de $\mathbf{T_P}$; nos basta saber que, con las condiciones de regularidad impuestas, cuando no se anulen, su relación con los vectores de la base de $\mathbf{T_P}$ satisfará la igualdad:

$$\underline{r}_u \cdot \underline{n}_v = \underline{r}_v \cdot \underline{n}_u \qquad (2)$$

Pues bien, en cada uno de los puntos **P** de cualquier curva trazada sobre la superficie se verifica que los ángulos $\angle(\underline{n}, \underline{n}_c)$ y $\angle(\dot{\underline{r}}^*, \dot{\underline{n}}^*)$ están relacionados con los módulos de los vectores $\dot{\underline{n}}^*$ y $\dot{\underline{r}}^*$, y con la propia curvatura de flexión **k** de la curva en **P**, mediante la fórmula:

$$\mathbf{k} \cos(\underline{n}, \underline{n}_c) = -\frac{|\dot{\underline{n}}^*|}{|\dot{\underline{r}}^*|} \cos(\dot{\underline{r}}^*, \dot{\underline{n}}^*) \qquad (3)$$

que resulta ser una relación fundamental de la que derivan muchas de las conclusiones expuestas anteriormente.

Según lo dicho, el segundo miembro de (3) da directamente una medida de la curvatura de la sección normal trazada por la dirección de la tangente $\dot{\underline{r}}^*$:

$$\mathbf{k}_n(\dot{\underline{r}}^*) = -\frac{|\dot{\underline{n}}^*|}{|\dot{\underline{r}}^*|} \cos(\dot{\underline{r}}^*, \dot{\underline{n}}^*) \qquad (4.a)$$

resultado que podemos escribir como cociente de dos productos escalares:

$$\mathbf{k}_n(\dot{\underline{r}}^*) = -\frac{|\dot{\underline{n}}^*|}{|\dot{\underline{r}}^*|} \frac{\dot{\underline{r}}^* \cdot \dot{\underline{n}}^*}{|\dot{\underline{r}}^*||\dot{\underline{n}}^*|} = -\frac{\dot{\underline{r}}^* \cdot \dot{\underline{n}}^*}{\dot{\underline{r}}^* \cdot \dot{\underline{r}}^*} \qquad (4.b)$$

y también, en función de los vectores unitarios $\dot{\underline{r}}_1^* = \frac{\dot{\underline{r}}^*}{|\dot{\underline{r}}^*|}$ y $\dot{\underline{n}}_1^* = \frac{\dot{\underline{n}}^*}{|\dot{\underline{n}}^*|}$ en la forma:

$$\mathbf{k}_n(\dot{\underline{r}}^*) = -\frac{|\dot{\underline{n}}^*|}{|\dot{\underline{r}}^*|} \dot{\underline{r}}_1^* \cdot \dot{\underline{n}}_1^* \qquad (4.c)$$

§ 7.-La aplicación de Weingarten. Curvaturas de las secciones normales y principales.

Los resultados (4.a), (4.b), (4.c), pueden expresarse sin la presencia explícita del vector $\dot{\underline{n}}^*$; o sea: presentarse en función únicamente del vector $\dot{\underline{r}}^*$, de tal manera que podamos gobernar el estudio de las curvaturas de flexión de las curvas sobre la superficie, en cada punto de las mismas, centrándonos solamente en la dirección de la tangente determinada por $\dot{\underline{r}}^*$. Para ello, definiremos una aplicación "ℓ" que, en principio, podremos considerar puramente formal con la única finalidad de permitirnos esta simplificación.

Para cualquier vector $\underline{a} \in \mathbf{T_P}$, en cualquier punto de la superficie, siendo $\underline{a} = a_1 \underline{r}_u + a_2 \underline{r}_v$, definimos:

$\ell(\underline{a}) = -a_1 \underline{n}_u - a_2 \underline{n}_v \quad , \quad \ell(\underline{a}) \in \mathbf{T_P}$

esta aplicación resulta ser lineal

$\ell(\underline{r}_u) = -\underline{n}_u \quad , \quad \ell(\underline{r}_v) = -\underline{n}_v \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \ell(a_1 \underline{r}_u + a_2 \underline{r}_v) = a_1 \ell(\underline{r}_u) + a_2 \ell(\underline{r}_v)$

y, por lo tanto, constituye un endomorfismo en $\mathbf{T_P}$. Presenta, además, una peculiar propiedad consecuencia de (2):

con $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbf{T_P}$, se verifica: $\underline{a} \cdot \ell(\underline{b}) = \underline{b} \cdot \ell(\underline{a}) \qquad (5)$

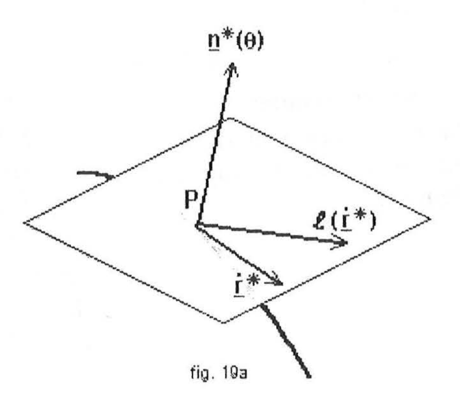


fig. 10a

Resulta fácil comprobar ahora que en un punto cualquiera de una curva sobre la superficie se puede escribir: $\ell(\underline{\dot{r}}^*) = -\underline{\dot{n}}^*$, lo que permite modificar las fórmulas $_{(4.a)}$ y $_{(4.b)}$ en la forma:

$$\mathbf{k} \cos(\underline{n}, \underline{n}_c) = \mathbf{k}_n(\underline{\dot{r}}^*) = -\frac{|\ell(\underline{\dot{r}}^*)|}{|\underline{\dot{r}}^*|} \cos(\underline{\dot{r}}^*, \ell(\underline{\dot{r}}^*)) = \frac{\underline{\dot{r}}^* . \ell(\underline{\dot{r}}^*)}{\underline{\dot{r}}^* . \underline{\dot{r}}^*} \qquad (6.a)$$

y el carácter lineal permite escribir, además:

$$\mathbf{k}_n(\underline{\dot{r}}^*) = \mathbf{k}_n(\underline{\dot{r}}_1^*) = \underline{\dot{r}}_1^* . \ell(\underline{\dot{r}}_1^*) \qquad (6.b)$$

Por otra parte ya advertimos que cuando consideramos en un punto **P** de la superficie un vector $\underline{a}$ cualquiera de su plano tangente, deberíamos contemplar este vector como el que define la dirección de la tangente a todo un conjunto de curvas que, sobre la superficie, pasan por **P**. Así, para cualquier $\underline{a} \in \mathbf{T_P}$:

$$\mathbf{k} \cos(\underline{n}, \underline{n}_c) = \frac{\underline{a} . \ell(\underline{a})}{\underline{a} . \underline{a}} = \underline{a}_1 . \ell(\underline{a}_1),$$

lo que debe resultar válido para cada una de las curvas que pasando por **P** tienen como tangente a la recta determinada por **P** y $\underline{a}$, entre las que están las secciones planas oblicuas o normales. En particular para la sección normal por $\underline{a}$:

$$\mathbf{k}_n(\underline{a}) = \frac{\underline{a} . \ell(\underline{a})}{\underline{a} . \underline{a}} = \underline{a}_1 . \ell(\underline{a}_1) \qquad (7)$$

El endomorfismo "ℓ" así definido viene a ser conocido como la aplicación de **J. Weingarten**. La fórmula $_{(7)}$ expresa de forma sintética y precisa la curvatura de las diferentes secciones normales en cualquier punto regular **P** de una superficie por la traza que define cualquier vector $\underline{a}$ del plano tangente $\mathbf{T_P}$. Esta aplicación resulta estar directamente vinculada al espectro de tales curvaturas.

Julius Weingarten (1836-1910) procedía de una familia humilde de origen polaco emigrada a Alemania. Su carrera estuvo siempre muy influenciada por la falta de apoyo financiero, sin embargo su trabajo sobre la teoría de superficies era de tal calidad que **Weingarten** recibió en la Universidad de Berlín un premio sobre las líneas de curvatura de una superficie en 1857 y en 1864 recibió un doctorado de la Universidad de Halle por este mismo trabajo. Las superficies de curvatura media constante o las de curvatura de **Gauss** constante fueron posteriormente conocidas como "superficies Weingarten". El trabajo de **Weingarten** en la deformación infinitesimal de superficies, que se emprende alrededor de 1886, fue muy considerado por **Darboux** que lo incluyó en su tratado de la teoría de superficies considerándolo digno de **Gauss**. El interés que **Darboux** mostró por su trabajo, animó a **Weingarten** a llevar sus resultados más lejos y escribió un extenso trabajo que le hizo ganar el Gran Premio de la Académie des Sciences de Paris en 1894. Se publicó en el Acta Matemática de 1897.

En cada punto regular **P** de una superficie podemos ahora considerar el conjunto $\mathbf{C_P}(\underline{a}_1)$ de los vectores unitarios $\underline{a}_1$ con origen en **P**. Cada vector $\underline{a}_1$ determinará una dirección asociada a **P**, en general distinta. Dejaremos a un lado, el caso particular en que: $\mathbf{k}_n(\underline{a}_1) = \mathbf{cte}$, $\forall \underline{a}_1 \in \mathbf{C_P}(\underline{a}_1)$, que posteriormente interpretaremos.

En el caso general, el conjunto de valores $\mathbf{k}_n(\underline{a}_1)$ presentará, necesariamente un mínimo y un máximo. En este caso, las direcciones que determinan los valores extremos son las direcciones principales de la superficie en el punto **P**. Supondremos que una de ellas es la dirección determinada por uno de los vectores de $\mathbf{C_P}(\underline{a}_1)$ que denominaremos $\underline{p}_1$ y tomaremos también de este conjunto su vector ortogonal $\underline{q}_1$. Cualquiera de los otros vectores $\underline{a}_1$ de $\mathbf{C_P}(\underline{a}_1)$ podrá escribirse en función del ángulo que forme con $\underline{p}_1$, por ejemplo, en la forma:

$\underline{a}_1 = \cos\theta\ \underline{p}_1 + \mathrm{sen}\,\theta\ \underline{q}_1$, y será: $\ell(\underline{a}_1) = \cos\theta\ \ell(\underline{p}_1) + \mathrm{sen}\,\theta\ \ell(\underline{q}_1)$.

Teniendo en cuenta, según $_{(5)}$, que $\underline{q}_1 . \ell(\underline{p}_1) = \underline{p}_1 . \ell(\underline{q}_1)$ podremos escribir:

$$\mathbf{k}_n(\underline{a}_1) = \underline{a}_1 . \ell(\underline{a}_1) = \cos^2\theta\ \underline{p}_1 . \ell(\underline{p}_1) + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\ \underline{p}_1 . \ell(\underline{q}_1) + \mathrm{sen}^2\theta\ \underline{q}_1 . \ell(\underline{q}_1), \qquad (8.a)$$

y la ecuación:

$$\frac{d}{d\theta}\mathbf{k}_n(\underline{a}_1) = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,(\underline{q}_1 . \ell(\underline{q}_1) - \underline{p}_1 . \ell(\underline{p}_1)) + 2\,(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)\,\underline{p}_1 . \ell(\underline{q}_1) = 0 \qquad (8.b)$$

deberá tener como solución $\theta = 0$, así que deberá ser: $\underline{q}_1\ \ell(\underline{p}_1) = \underline{p}_1\ \ell(\underline{q}_1) = 0$.

Teniendo en cuenta ahora la ortogonalidad de $\underline{p}_1$ y $\underline{q}_1$, se deberá verificar:

$\ell(\underline{p}_1) = \lambda_1\ \underline{p}_1$ y $\ell(\underline{q}_1) = \lambda_2\ \underline{q}_1$, siendo $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$.

La ecuación $_{(8.b)}$ puede, por lo tanto, escribirse:

$$\frac{d}{d\theta} k_n(\underline{a}_1) = 2 \text{ sen } \theta \cos\theta\,(\lambda_1 - \lambda_2) = 0,$$

así que la segunda solución se alcanza para $\theta = \pi/2$, o sea que si $\underline{p}_1$ es una de las soluciones, su vector perpendicular $\underline{q}_1$ es también una solución. Deducimos pues que las direcciones principales, en el caso general en que están determinadas, son ortogonales. Los valores extremales k_1 y k_2 son las curvaturas principales de la superficie en el punto en cuestión:

$k_n(\underline{p}_1) = \underline{p}_1\, \ell(\underline{p}_1) = k_1 = \lambda_1$ y $k_n(\underline{q}_1) = \underline{q}_1\, \ell(\underline{q}_1) = k_2 = \lambda_2$,

por lo que:

$\ell(\underline{p}_1) = k_1\, \underline{p}_1$ y $\ell(\underline{q}_1) = k_1\, \underline{q}_1$,

así que las curvaturas principales son los autovalores del endomorfismo "ℓ" y las direcciones principales sus autovectores. Teniendo en cuenta los resultados anteriores, la fórmula $_{(8.a)}$ se transforma en la fórmula de **Euler** $_{(1)}$

Para proceder al cálculo de las curvaturas principales y direcciones principales en cada punto regular de una superficie bastará pues, con disponer de la matriz **£** de la aplicación "ℓ".

§ 8.-Las funciones escalares E, F, G, e, f, g y la matriz £.

Estableceremos la siguiente notación general para determinados productos escalares entre los vectores $\underline{r}_u$, $\underline{r}_v$, $\underline{n}_u$, $\underline{n}_v$ del plano tangente T_P, en cualquier punto regular **P** de una superficie:

$$\underline{r}_u \cdot \underline{r}_u = E \qquad \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v = F \qquad \underline{r}_v \cdot \underline{r}_v = G \tag{9.1}$$

$$-\underline{r}_u \cdot \underline{n}_u = e \qquad -\underline{r}_u \cdot \underline{n}_v = -\underline{r}_v \cdot \underline{n}_u = f \qquad -\underline{r}_v \cdot \underline{n}_v = g \tag{9.2}$$

Para cualquier $\underline{a}$ del plano tangente T_P en cualquier punto regular **P**: $\underline{a} = a_1\, \underline{r}_u + a_2\, \underline{r}_v$, tenemos:

$\ell(\underline{a}) = -a_1\, \underline{n}_u - a_2\, \underline{n}_v$, $\ell(\underline{a}) \in T_P$.

Con la notación $_{(9.1)}$ y $_{(9.2)}$ anterior podemos expresar el resultado $_{(7)}$ en la forma:

$$k_n(\{a_1, a_2\}) = \frac{\underline{a}.\, \ell(\underline{a})}{\underline{a}.\, \underline{a}} = \frac{(a_1 \underline{r}_u + a_2 \underline{r}_v)(-a_1 \underline{n}_u - a_2 \underline{n}_v)}{(a_1 \underline{r}_u + a_2 \underline{r}_v)(a_1 \underline{r}_u + a_2 \underline{r}_v)} = \frac{e\, a_1^2 + 2 f\, a_1 a_2 + g\, a_2^2}{E\, a_1^2 + 2 F\, a_1 a_2 + G\, a_2^2} \tag{10}$$

fórmula muy importante cuya aplicación es, como veremos, inmediata. En cada punto regular de la superficie, bastará obtener las componentes de la dirección $\underline{a}$ en la base $[\underline{r}_u, \underline{r}_v]$ de su plano tangente, vector que define la traza de este plano con el de sección normal, para obtener la curvatura de la correspondiente sección normal. Por ejemplo, podemos obtener las curvaturas de las secciones normales en cualquier punto **P** en la traza sobre T_P de los propios vectores $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$; el resultado es:

$$k_n(\underline{r}_u) = k_n(\{1, 0\}) = \frac{e}{E} \quad \text{y} \quad k_n(\underline{r}_v) = k_n(\{0, 1\}) = \frac{g}{G},$$

que nos puede servir de utilidad más adelante.

Los escalares **E, F, G, e, f, g**, están perfectamente determinados por las relaciones $_{(9.1)}$ y $_{(9.2)}$. No obstante, para el cálculo de los **e, f, g**, no será necesario conocer explícitamente los vectores $\underline{n}_u$ y $\underline{n}_v$ debido a que

con $\underline{r}_{uu} = \dfrac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u^2}$, $\underline{r}_{uv} = \dfrac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u\, \partial v}$, $\underline{r}_{vv} = \dfrac{\partial^2 \underline{r}}{\partial v^2}$, se verifica:

$$\underline{r}_u \cdot \underline{n}_u = \underline{r}_{uu} \cdot \underline{n} = \underline{r}_{uu} \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} = \frac{(\underline{r}_{uu}, \underline{r}_u, \underline{r}_v)}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} = e \tag{9.3a}$$

$$\underline{r}_u \cdot \underline{n}_v = \underline{r}_v \cdot \underline{n}_u = \underline{r}_{uv} \cdot \underline{n} = \underline{r}_{uv} \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} = \frac{(\underline{r}_{uv}, \underline{r}_u, \underline{r}_v)}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} = f \tag{9.3b}$$

$$\underline{r}_v \cdot \underline{n}_v = \underline{r}_{vv} \cdot \underline{n} = \underline{r}_{vv} \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} = \frac{(\underline{r}_{vv}, \underline{r}_u, \underline{r}_v)}{|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|} = g \tag{9.3c}$$

Teniendo en cuenta ahora que $\underline{r}_u \cdot \underline{r}_v = |\underline{r}_u|\,|\underline{r}_v|\ \cos(\underline{r}_u, \underline{r}_v)$, se obtiene:

$$\cos(\underline{r}_u, \underline{r}_v) = \frac{F}{\sqrt{E\,G}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}(\underline{r}_u, \underline{r}_v) = \frac{\sqrt{E\,G - F^2}}{\sqrt{E\,G}},$$

y de aquí:

$$|\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = |\underline{r}_u|\,|\underline{r}_v|\ \text{sen}(\underline{r}_u, \underline{r}_v) = \sqrt{E\,G - F^2},$$

por lo que las ecuaciones $_{(9.3)}$ pueden escribirse finalmente:

$$e = \frac{(\underline{r}_{uu}, \underline{r}_u, \underline{r}_v)}{\sqrt{E\,G - F^2}}, \qquad f = \frac{(\underline{r}_{uv}, \underline{r}_u, \underline{r}_v)}{\sqrt{E\,G - F^2}}, \qquad g = \frac{(\underline{r}_{vv}, \underline{r}_u, \underline{r}_v)}{\sqrt{E\,G - F^2}} \tag{9.4}$$

En este punto es conveniente registrar los numeradores de estos escalares – productos mixtos de los $\underline{r}_{uu}, \underline{r}_{uv}, \underline{r}_{vv}$, con los vectores $\underline{r}_u, \underline{r}_v$, respectivamente –, estableciendo la notación:

$$e^* = (\underline{r}_{uu}, \underline{r}_u, \underline{r}_v), \qquad f^* = (\underline{r}_{uv}, \underline{r}_u, \underline{r}_v), \qquad g^* = (\underline{r}_{vv}, \underline{r}_u, \underline{r}_v) \tag{9.5}$$

que posteriormente tendremos ocasión de utilizar.

Se comprende que los escalares **e**, **f**, **g**, provienen de gobernar, mediante productos escalares, la variación de la normal a la superficie en las proximidades de un punto regular. En cualquier dirección arbitraria, la variación de la dirección $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ puede describirse con $\underline{r}_{uv} = \underline{r}_{vu}$, mediante: $(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)_u = (\underline{r}_{uu} \times \underline{r}_v) + (\underline{r}_u \times \underline{r}_{uv})$ y $(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)_v = (\underline{r}_{uv} \times \underline{r}_v) + (\underline{r}_u \times \underline{r}_{uv})$,

y sus productos escalares por los vectores $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$ serán:

$(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)_u \cdot \underline{r}_u = -(\underline{r}_{uu}, \underline{r}_u, \underline{r}_v) = -e^*$, $\quad (\underline{r}_u \times \underline{r}_v)_u \cdot \underline{r}_v = (\underline{r}_u \times \underline{r}_v)_v \cdot \underline{r}_u = -(\underline{r}_{uu}, \underline{r}_u, \underline{r}_v) = -f^*$, $\quad (\underline{r}_u \times \underline{r}_v)_v \cdot \underline{r}_v = -g^*$,

si además se tiene en cuenta que $(\underline{r}_u \times \underline{r}_v) \cdot \underline{r}_u = (\underline{r}_u \times \underline{r}_v) \cdot \underline{r}_v = 0$, bastará dividir por $|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|$ estos escalares para obtener los **e**, **f**, **g**.

Para obtener ahora la matriz **£** de ℓ bastará referir $\ell(\underline{a})$ –y por lo tanto los vectores $\underline{n}_u$ y $\underline{n}_v$ – a la base $[\underline{r}_u, \underline{r}_v]$; o sea, obtener $a_1^{\otimes}$ y $a_2^{\otimes}$ en $\ell(\underline{a}) = a_1^{\otimes}\ \underline{r}_u + a_2^{\otimes}\ \underline{r}_v$.

Escribiremos genéricamente: $\underline{n}_u = \alpha\ \underline{r}_u + \beta\ \underline{r}_v$, así que:

$\underline{n}_u \cdot \underline{r}_u = -e = \alpha\,E + \beta\,F$

$\underline{n}_u \cdot \underline{r}_v = -f = \alpha\,F + \beta\,G$

y de este sistema puede deducirse que $\alpha = \dfrac{f\,F - e\,G}{E\,G - F^2}$ y $\beta = \dfrac{e\,F - f\,E}{E\,G - F^2}$,

así que podemos expresar las componentes de $\underline{n}_u$ respecto de $[\underline{r}_u, \underline{r}_v]$ en función de **E, F, G, e, f, g** :

$$\underline{n}_u = \frac{f\,F - e\,G}{E\,G - F^2}\,\underline{r}_u + \frac{e\,F - f\,E}{E\,G - F^2}\,\underline{r}_v \tag{11.a}$$

Procediendo de la misma forma con $\underline{n}_v$ se obtiene:

$$\underline{n}_v = \frac{g\,F - f\,G}{E\,G - F^2}\,\underline{r}_u + \frac{f\,F - g\,E}{E\,G - F^2}\,\underline{r}_v \tag{11.b}$$

Las ecuaciones $_{(11.a)}$ y $_{(11.b)}$ son conocidas como las "ecuaciones de **Weingarten**"; nos permiten expresar finalmente $\ell(\underline{a})$ en la forma:

$$\ell(\underline{a}) = a_1^{\otimes}\ \underline{r}_u + a_2^{\otimes}\,\underline{r}_v = \left(a_1\,\frac{e\,G - f\,F}{E\,G - F^2} + a_2\,\frac{f\,G - g\,F}{E\,G - F^2}\right)\underline{r}_u + \left(a_1\,\frac{f\,E - e\,F}{E\,G - F^2} + a_2\,\frac{g\,E - f\,F}{E\,G - F^2}\right)\underline{r}_v$$

de donde podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} a_1^{\oplus} \\ a_2^{\oplus} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e\,G - f\,F}{E\,G - F^2} & \dfrac{f\,G - g\,F}{E\,G - F^2} \\ \dfrac{f\,E - e\,F}{E\,G - F^2} & \dfrac{g\,E - f\,F}{E\,G - F^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = £ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

así que:

$$£ = \begin{pmatrix} \frac{eG - fF}{EG - F^2} & \frac{fG - gF}{EG - F^2} \\ \frac{fE - eF}{EG - F^2} & \frac{gE - fF}{EG - F^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tr}\, £ = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},\ \det £ = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \qquad (12)$$

Las curvaturas y direcciones principales en cada punto pueden obtenerse calculando los valores y vectores propios de esta matriz. En particular, las curvaturas principales satisfarán la ecuación:

$$k^2 - \text{tr}\, £\ k + \det £ = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} k + \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \qquad (13)$$

de la que se pueden deducir inmediatamente los índices "curvatura media k_m" y "curvatura total k_T" de la superficie en función de los escalares **e, f, g, E, F, G**:

$$k_m = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \qquad k_T = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Así, considerando por ejemplo la superficie $\underline{r} = \{u, v, u^2 + v^2\}$, obtendremos en primer lugar:

$\underline{r}_u = \{1, 0, 2u\}$, $\underline{r}_v = \{0, 1, 2v\}$, $\underline{r}_{uu} = \{0, 0, 2\}$, $\underline{r}_{uv} = 0$, $\underline{r}_{vv} = \{0, 0, 2\}$.

En el punto $P \equiv (1, 2, 5) \Leftrightarrow u = 1, v = 2$, estos vectores toman los valores:

$\underline{r}_u = \{1, 0, 2\}$, $\underline{r}_v = \{0, 1, 4\}$, $\underline{r}_{uu} = \{0, 0, 2\}$, $\underline{r}_{uv} = 0$, $\underline{r}_{vv} = \{0, 0, 2\}$, así que:

$E = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_u = 5$, $F = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v = 8$, $G = \underline{r}_v \cdot \underline{r}_v = 17$; $EG - F^2 = 21$,

$$e = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}},\ f = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{21}} = 0,\ g = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}}, \qquad (e^* = 2, f^* = 0, g^* = 2),$$

por lo que la matriz **£** se particulariza en el punto **P** en la forma: $£ = \begin{pmatrix} \frac{34}{21\sqrt{21}} & -\frac{16}{21\sqrt{21}} \\ -\frac{16}{21\sqrt{21}} & \frac{10}{21\sqrt{21}} \end{pmatrix}$.

La ecuación (13) se convertirá en la: $k^2 - \frac{44}{21\sqrt{21}} k + \frac{4}{21^2} = 0$, de la que se deducen directamente los valores de la curvatura media y total de la superficie en este punto: $k_m = \frac{1}{2}\frac{44}{21\sqrt{21}} = \frac{22}{21\sqrt{21}}$, $k_T = \frac{4}{21^2}$;

y sus soluciones serán las curvaturas principales: $k_1 = \frac{42}{21\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $k_2 = \frac{2}{21\sqrt{21}}$.

El subespacio propio $\underline{p} = \{\alpha, \beta\}$ satisfará el sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{34}{21\sqrt{21}} - \frac{42}{21\sqrt{21}} & -\frac{16}{21\sqrt{21}} \\ -\frac{16}{21\sqrt{21}} & \frac{10}{21\sqrt{21}} - \frac{42}{21\sqrt{21}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0, \text{ de donde } \alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \underline{p} = \{-2, 1\},$$

y $\underline{q} = \{\alpha', \beta'\}$ el sistema:

$$\begin{pmatrix} \frac{34}{21\sqrt{21}} - \frac{2}{21\sqrt{21}} & -\frac{16}{21\sqrt{21}} \\ -\frac{16}{21\sqrt{21}} & \frac{10}{21\sqrt{21}} - \frac{2}{21\sqrt{21}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = 0, \text{ de donde } -2\alpha' + \beta' = 0 \Rightarrow \underline{q} = \{1, 2\},$$

así que las direcciones principales en $P \equiv (1, 2, 5)$ vendrán determinadas por los vectores:

$\underline{p} = -2\,\underline{r}_u + 1\,\underline{r}_v = -2\{1, 0, 2\} + 1\{0, 1, 4\} = \{-2, 1, 0\}$

$\underline{q} = 1\,\underline{r}_u + 2\,\underline{r}_v = 1\{1, 0, 2\} + 2\{0, 1, 4\} = \{1, 2, 10\}$.

Podemos ensayar ahora la fórmula $_{(16)}$ para las direcciones principales $\underline{p}=\{-2, 1\}$ y $\underline{q}=\{1, 2\}$, comprobando los valores de las curvaturas principales:

$$k_n(\{-2, 1\}) = k_1 = \frac{\frac{2}{\sqrt{21}}(-2)^2 + 0 + \frac{2}{\sqrt{21}}1^2}{5.(-2)^2 + 2.8(-2).1 + 17.1^2} = \frac{2}{\sqrt{21}},$$

$$k_n(\{1, 2\}) = k_2 = \frac{\frac{2}{\sqrt{21}}1^2 + 0 + \frac{2}{\sqrt{21}}2^2}{5.1^2 + 2.8.1.2 + 17.2^2} = \frac{2}{21\sqrt{21}},$$

y los radios de curvatura de la superficie en el punto **P** serán: $R_1 = \frac{\sqrt{21}}{2}$, $R_2 = \frac{21\sqrt{21}}{2}$.

Si fijamos ahora cualquier otro vector arbitrario del $T_{(1,2,5)}$, el definido, por ejemplo, en su base por el par {1,1}, o sea, el vector: $\underline{a} = 1\{1, 0, 2\} + 1\{0, 1, 4\} = \{1, 1, 6\}$,

podemos obtener la curvatura de la sección normal correspondiente a esa dirección con:

$$k_n(\{1, 1\}) = \frac{\frac{2}{\sqrt{21}}1^2 + 0 + \frac{2}{\sqrt{21}}1^2}{5.1^2 + 2.8.1.1 + 17.1^2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{21}}}{38} = \frac{2}{19\sqrt{21}},$$

y a este mismo resultado se llega disponiendo de los valores de las curvaturas principales $\frac{42}{21\sqrt{21}}$ y $\frac{2}{21\sqrt{21}}$, por aplicación de la fórmula general de **Euler** $_{(1)}$, obteniendo previamente el ángulo θ que forma el vector {1, 1, 6} con cualquiera de las direcciones principales, por ejemplo con la $\underline{p} = \{-2, 1, 0\}$; dicho ángulo vendrá caracterizado por:

$$\cos\theta = \frac{\underline{a}\cdot\underline{p}}{|\underline{a}|\,|\underline{p}|} = \frac{\{1,1,6\}.\{-2,1,0\}}{\sqrt{38}\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{190}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{189}}{\sqrt{190}},$$

así que: $k_n(\theta) = k_1\cos^2\theta + k_2\,\text{sen}^2\theta = \frac{42}{21\sqrt{21}}\frac{1}{190} + \frac{2}{21\sqrt{21}}\frac{189}{190} = \frac{2}{19\sqrt{21}}$.

§ 9.-Procedimientos alternativos simplificados para el cálculo de curvaturas y direcciones principales.

Se puede evitar la formación explícita de la matriz **£**. Por un lado está, desde luego, la ecuación $_{(13)}$:

$$k^2 - \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}k + \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0,$$

que nos puede servir para calcular directamente las curvaturas principales. Pero puede abordarse también la determinación de curvaturas y direcciones principales desde el cálculo de éstas últimas. Para ello plantearemos las direcciones principales $\underline{p}$ y $\underline{q}$ en la forma $\{1, \lambda\}$. Esto será válido solamente si ninguna de ellas coincide eventualmente con la dirección $\underline{r}_v = \{0, 1\}$; esta exclusión la corregiremos posteriormente.

Despejando k_i de la primera ecuación del sistema $(\text{£} - k_i\,I)\begin{pmatrix}1\\ \lambda\end{pmatrix} = 0$ y substituyéndola en la segunda, se obtiene la: $(fG - gF)\lambda^2 + (eG - gE)\lambda + eF - fE = 0$ (recuérdese que $EG - F^2 = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| \neq 0$),

que puede escribirse en la forma: $\begin{vmatrix}\lambda^2 & -\lambda & 1\\ e & f & g\\ E & F & G\end{vmatrix} = 0,$

una sencilla notación que nos permite obtener los dos valores λ buscados para las direcciones principales.

Observamos, además, que pueden simplificarse los elementos de cada línea del determinante de esta ecuación, utilizando valores proporcionales a los mismos: **e, f, g** y **E, F, G**. En particular, al ser $EG - F^2 \neq 0$ podemos escribir directamente los numeradores de **e, f, g** particularizados en $_{(9.5)}$ y utilizar, alternativamente, la ecuación más sencilla:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ e^* & f^* & g^* \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

que, en general, tendrá dos soluciones λ_1, λ_2 con las que obtendremos directamente las direcciones principales en la forma:

$\underline{p} = \{1, \lambda_1\} = \underline{r}_u + \lambda_1\, \underline{r}_v$ y $\underline{q} = \{1, \lambda_2\} = \underline{r}_u + \lambda_2\, \underline{r}_v$.

Esta ecuación $_{(14)}$ tiene raíces reales distintas λ_1 y λ_2 salvo en los casos:

a): $f^*G - g^*F = 0$, $(e^*G - g^*E \neq 0) \Rightarrow \dfrac{f^*}{F} = \dfrac{g^*}{G}$,

en el que solamente tiene una solución λ correspondiente a una de las direcciones principales $\{1, \lambda\}$; corersponde justamente al caso en que una de las direcciones principales coincide con $\underline{r}_v = \{0, 1\}$, así que bastará añadirla para completar ambas.

b): $f^*G - g^*F = 0$ y $e^*G - g^*E = 0 \Rightarrow \dfrac{e^*}{E} = \dfrac{f^*}{F} = \dfrac{g^*}{G}$,

en el que no existen estrictamente direcciones principales o, si se quiere, todas las direcciones resultan ser principales. Es el caso de los puntos umbílicos, o bien, de los puntos planos, en los que $e^* = f^* = g^* = 0$. En ambos casos todas las curvaturas de las secciones normales son iguales y distintas de cero o todas nulas, respectivamente.

Obtenidas, en su caso, las direcciones $\underline{p} = \{1, \lambda_1\}$ y $\underline{q} = \{1, \lambda_2\}$, pueden ahora obtenerse las curvaturas principales por aplicación sistemática de la fórmula $_{(10)}$:

$$k_n(\{1, \lambda_1\}) = k_1 = \frac{e + 2f\lambda_1 + g\lambda_1^2}{E + 2F\lambda_1 + G\lambda_1^2} \quad \text{y} \quad k_n(\{1, \lambda_2\}) = k_2 = \frac{e + 2f\lambda_2 + g\lambda_2^2}{E + 2F\lambda_2 + G\lambda_2^2},$$

y, en el caso de coincidir alguna con el vector $\underline{r}_v$ ($f^*G - g^*F = 0$, $e^*G - g^*E \neq 0$), añadir como curvatura principal $k_n(\{0, 1\}) = \dfrac{g}{G}$.

Trivialmente, puede ocurrir que $f^*G - g^*F = 0$ y $e^*G - g^*E \neq 0$, con lo que $\underline{p} = \underline{r}_v = \{0, 1\}$, obteniendo, además, de $_{(14)}$ la solución $\lambda = 0$, o sea, $\underline{q} = \{1, 0\} = \underline{r}_u$ y las curvaturas principales resultan: $k_1 = \dfrac{e}{E}$ y $k_2 = \dfrac{g}{G}$. Este caso, en el que las direcciones principales coinciden con los vectores $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$ será incluido posteriormente, junto a otros, en un resumen de algunos ejemplos particulares que vinculan ciertos valores nulos de **e**, **f**, **g** y de **F**, en determinados puntos, con algunas características relacionadas con la forma de la superficie.

Resumiendo: las reglas básicas para el cálculo de las direcciones principales, en un punto regular de una superficie, pueden establecerse con los siguientes criterios compatibles entre sí:

a) - Existen dos direcciones principales perfectamente definidas en todos los puntos en los que no se verifica $\dfrac{e}{E} = \dfrac{f}{F} = \dfrac{g}{G}$, o bien $\dfrac{e^*}{E} = \dfrac{f^*}{F} = \dfrac{g^*}{G}$. Ambas direcciones resultan ser siempre ortogonales.

b) - Pueden obtenerse en la forma $\underline{p} = \underline{r}_u + \lambda_1\, \underline{r}_v$ y $\underline{q} = \underline{r}_u + \lambda_2\, \underline{r}_v$, en los que los valores λ_1, λ_2 satisfacen la ecuación algebraica:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ e & f & g \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o bien:} \quad \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ e^* & f^* & g^* \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0.$$

c) - Si $fG - gF = 0$, o bien $f^*G - g^*F = 0$, una de las direcciones principales coincide con $\underline{r}_v$.

Se comprueba, por ejemplo, que en el caso de ser $f = F = 0$ en un punto, las dos direcciones principales coinciden, en ese punto, con las direcciones $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$. Este caso, junto a otros varios, se citará, como se ha dicho, en el **§ 15**.

Como ejemplo de estos procedimientos, podemos volver a realizar los cálculos del apartado anterior **§ 8**, sobre el paraboloide $\{u, v, u^2 + v^2\}$, en el que:

$\underline{r}_u = \{1, 0, 2u\}$, $\underline{r}_v = \{0, 1, 2v\}$, $\underline{r}_{uu} = \{0, 0, 2\}$, $\underline{r}_{uv} = 0$, $\underline{r}_{vv} = \{0, 0, 2\}$.

En el punto **P** $\equiv$(**1, 2, 5**), se obtuvieron los valores:

$\underline{r}_u = \{1, 0, 2\}$, $\underline{r}_v = \{0, 1, 4\}$, $\underline{r}_{uu} = \{0, 0, 2\}$, $\underline{r}_{uv} = 0$, $\underline{r}_{vv} = \{0, 0, 2\}$,

así que: **E = 5, F = 8, G =17 , EG – F ^{2}= 21; e* = 2, f *= 0 , g* = 2.**

Las direcciones principales pueden obtenerse ahora de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 17 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 17 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$$

de donde obtenemos las raíces: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, y con ellas las direcciones principales que serán:

$\underline{p} = \{1, 2\} \Rightarrow \underline{p} = 1\,\underline{r}_u + 2\,\underline{r}_v = 1\,\{1, 0, 2\} + 2\,\{0, 1, 4\} = \{1, 2, 10\}$,

$\underline{q} = \{1, -\frac{1}{2}\} \Rightarrow \underline{q} = \underline{r}_u - \frac{1}{2}\underline{r}_v = \{1, 0, 2\} - \frac{1}{2}\{0, 1, 4\} = \{1, -\frac{1}{2}, 0\} \equiv \{2, -1, 0\}$,

con lo que las curvaturas principales podrán obtenerse ahora de:

$$k_n(\{1, 2\}) = k_1 = \frac{1}{\sqrt{21}} \frac{e^*.1^2 + 2.f^*.1.2 + g^*.2^2}{E.1^2 + 2.F.1.2 + G.2^2} = \frac{2}{21\sqrt{21}},$$

$$k_n(\{1, -\tfrac{1}{2}\}) = k_2 = \frac{1}{\sqrt{21}} \frac{e^*.1^2 + 2.f^*.1(-\frac{1}{2}) + g^*(-\frac{1}{2})^2}{E.1^2 + 2.F.1(-\frac{1}{2}) + G(-\frac{1}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{21}},$$

ambos valores obtenidos anteriormente de la $_{(13)}$.

Tomaremos ahora otro punto de esta misma superficie tal como el **Q** $\equiv$(**0, 1, 1**) $\Leftrightarrow$ **u = 0, v =** 1. Los vectores toman ahora los valores: $\underline{r}_u = \{1, 0, 0\}$, $\underline{r}_v = \{0, 1, 2\}$, $\underline{r}_{uu} = \{0, 0, 2\}$, $\underline{r}_{uv} = 0$, $\underline{r}_{vv} = \{0, 0, 2\}$,

así que en este punto: **E = 1, F = 0, G = 5 , EG – F ^{2}= 5; e* = 2, f *= 0 , g* = 2.** La ecuación:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4\lambda = 0,$$

proporciona la única solución $\lambda = 0$, así que las direcciones principales serán:

$\underline{p} = \{1, 0\} \Rightarrow \underline{p} = 1\,\underline{r}_u + 0\,\underline{r}_v = \underline{r}_u = \{1, 0, 0\}$ y $\underline{q} = \{0, 1\} \Rightarrow \underline{q} = \underline{r}_v = \{0, 1, 2\}$.

Las curvaturas principales son: $k_n(\{1, 0\}) = k_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{e^*.1^2}{E.1^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ y $k_n(\{0,1\}) = k_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{g^*.1^2}{G.1^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Finalmente, en el punto **R** $\equiv$(**0, 0, 0**) $\Leftrightarrow$ **u = 0, v = 0**. Los vectores toman los valores:

$\underline{r}_u = \{1, 0, 0\}$, $\underline{r}_v = \{0, 1, 0\}$, $\underline{r}_{uu} = \{0, 0, 2\}$, $\underline{r}_{uv} = 0$, $\underline{r}_{vv} = \{0, 0, 2\}$,

y se obtienen: **E = 1, F = 0, G = 1 , EG – F ^{2}= 1; e* = 2, f *= 0 , g* = 2.** La ecuación:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

se satisface para cualquier valor de λ, estamos por lo tanto en un punto umbílico y todas las curvaturas de las secciones normales serán iguales $k_n = k_1 = k_2 = 1$ ($\frac{e}{E}$, por ejemplo).

§ 10.-Representación de curvaturas.

Ya hemos citado en **§4** el plano sobre el que se pueden representar las coordenadas **(k_1, k_2)** de cada punto de la superficie. Los fragmentos considerados pueden determinar sobre este mapa distintos conjuntos de puntos muy diversos, vinculados a la cualidad de la forma local de la superficie, que pueden reducirse incluso a segmentos de recta o a puntos aislados – superficies desarrollables, superficies mínimas, esferas, planos, etc. –. Vamos a centrarnos aquí, sin embargo, en describir la variación de la forma de la superficie regular en una cierta región de la misma obteniendo la representación de las variaciones de los índices curvatura media y total **k_m** y **k_T**.

La representación de $k_m = \frac{1}{2}\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}$ y $k_T = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ nos conduce a considerar otras "superficies de curvatura", también regulares, asociadas a la superficie en cuestión. En general, bastará considerarlas en la forma de **Monge**: $z = k_m(u,v)$ y $z = k_T(u,v)$ en cualquier región considerada.

Así, en el paraboloide elíptico $\{u, v, u^2+v^2\}$ representado en la figura 23[(1)], en el que:

$\underline{r}_u=\{1, 0, 2u\}$, $\underline{r}_v=\{0, 1, 2v\}$; $\underline{r}_{uu}=\{0, 0, 2\}$, $\underline{r}_{uv}=0$, $\underline{r}_{vv}=\{0, 0, 2\}$, podemos obtener las funciones:

$E=\underline{r}_u.\underline{r}_u=1+4u^2$, $F=\underline{r}_u.\underline{r}_v=4uv$, $G=\underline{r}_v.\underline{r}_v=1+4v^2$; $EG-F^2=1+4u^2+4v^2$, así que:

$$e=\frac{(\underline{r}_{uu},\underline{r}_u,\underline{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}},\quad f=\frac{(\underline{r}_{uv},\underline{r}_u,\underline{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=0,\quad g=\frac{(\underline{r}_{vv},\underline{r}_u,\underline{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}},$$

y la ecuación de las curvaturas principales quedará:

$$k^2-\frac{4(1+2u^2+2v^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}}k+\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}=0,$$

con lo que: $k_m=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{4(1+2u^2+2v^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}}$ y $k_T=k_1k_2=\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}$.

Pueden ahora considerarse las superficies:

$$\{u, v, \frac{4(1+2u^2+2v^2)}{(1+4u^2+4v^2)^{\frac{3}{2}}}\} \quad y \quad \{u, v, \frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}\},$$

representadas en la figura 23 [(1)] (k_T y k_m).

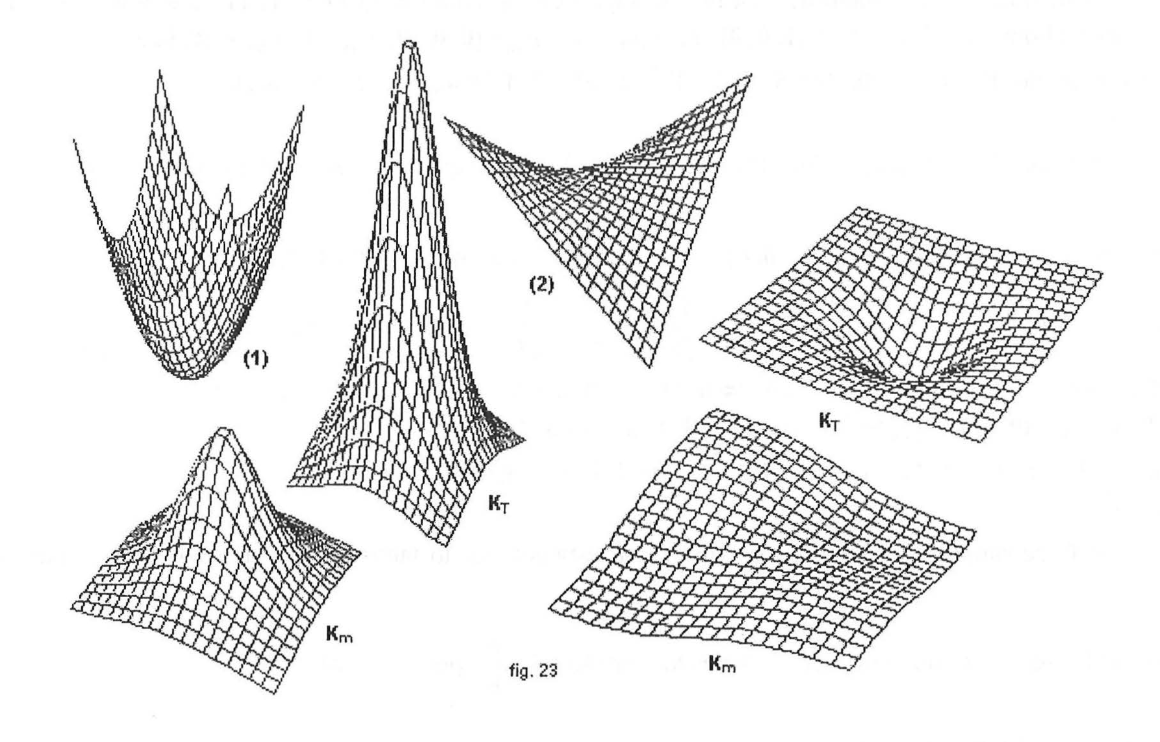


fig. 23

Si realizamos los mismos cálculos sobre el paraboloide hiperbólico **{u, v, u v}**, con:

$$E= 1+ v^2,\ F= u\,v,\ G=1 + u^2;\ EG-F^2= 1+ u^2+ v^2,\ e = 0,\ f = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}},\ g = 0,$$

obtenemos las curvaturas: $k_m=\dfrac{-u\,v}{(1+u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$ y $k_T=\dfrac{1}{(1+u^2+v^2)^2}$ y la representación gráfica de la figura 23(2).

En estas dos superficies, la variación de las curvaturas media y total resultan bastante previsibles. Entre las superficies que proporcionan cálculos que no resultan demasiado complicados podemos encontrar algunos ejemplos más, que pueden mostrar variantes menos esperadas; nos limitaremos a dos de las superficies representadas en la figura 9 del § 4: la "silla" **{u, v, u^3 –3 u v^2}**(3), que tiene un solo punto plano aislado y el conoide **{u, v u^3, 1–v}**(4) que tiene una generatriz de puntos planos. El primer caso:

$$E = 1+ (3u^2-3v^2)^2,\ F = -6\,u\,v\,(3u^2-3v^2),\ G =1 + 36\,u^2 v^2,$$

$$e=\frac{6u}{\sqrt{1+9u^4+9v^4+18u^2v^2}},\quad f=\frac{-6u}{\sqrt{1+9u^4+9v^4+18u^2v^2}},\quad g=\frac{-6u}{\sqrt{1+9u^4+9v^4+18u^2v^2}},$$

y obtenemos las curvaturas:

$$k_m=\frac{-27u^5+81u\,v^4+54u^3v^2}{(1+9u^4+9v^4+18u^2v^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad k_T=\frac{-36(u^2+v^2)}{(1+9u^4+9v^4+18u^2v^2)^2}.$$

Para el conoide se obtienen: $E= 1+ 9\,u^4 v^2$, $F= 3\,u^5\,v$, $G= u^6+ 1$,

$$e=\frac{6u\,v}{\sqrt{1+u^6+9u^4v^2}},\quad f=\frac{3u^2}{\sqrt{1+u^6+9u^4v^2}},\quad g=0,$$

y la curvaturas:

$$k_m=\frac{-6u\,v-11u^7v}{2(1+u^6+9u^4v^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad k_T=\frac{-9u^4}{(1+u^6+9u^4v^2)^2}.$$

Ambas superficies, y sus superficies de curvatura asociadas, están representadas en la figura 24 (3) y 24(4).

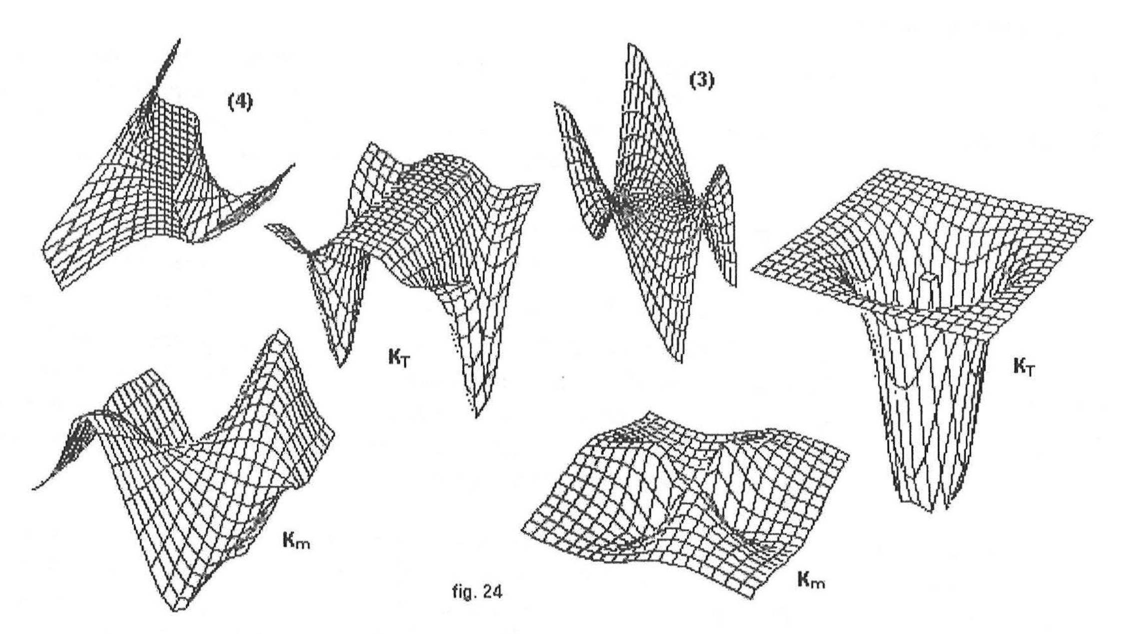


fig. 24

Finalmente, trataremos de obtener en el mismo sentido la variación de las curvaturas media y total de los helicoides (5) y (6) de la figura 25: **{u cos v, u sen v, v}**(5) y **{cos u–v sen u, sen u+v cos u, u+v}**(6). Los escalares **E, F, G; e, f, g,** resultan para la primera de las superficies (5):

$$E = 1,\ F = 0,\ G = u^2;\ e = 0,\ f = -\frac{1}{u},\ g = 0,$$

y las curvaturas principales verifican: $k_1+ k_2 = 0,\ k_1\,k_2 = -\dfrac{1}{u^4}$.

Encontramos aquí un resultado peculiar; las curvaturas resultan ser, trivalmente no nulas ($\pm\frac{1}{u^2}$) pero la curvatura media permanece igual a cero en todos los puntos, en tanto la curvatura total solamente depende de uno de los parámetros ("u"). La representación de los índices de curvatura resultaría ser, por lo tanto, una superficie plana para $\mathbf{k_m}$ y podemos aproximar la $\mathbf{k_T}$ con la forma representada en la figura 25[(5)]. Se trata de una superficie mínima a la que nos referiremos posteriormente en el **§ 17.**

Para la superficie [(6)], se obtienen los resultados: $\mathbf{E = 2+v^2, F = 2, G = 2\,; e = -\frac{v}{\sqrt{2}}, f = 0, g = 0}$,

y las curvaturas principales verifican: $\mathbf{k_1 + k_2 = -1}$, $\mathbf{k_1\ k_2 = 0}$. Aquí la curvatura media resulta constante y la curvatura total es nula en todos los puntos de la superficie lo que darían las dos representaciones planas de la figura 25[(6)]. Sobre las superficies de curvatura total nula – desarrollables –, se hablará en el **§ 16.**

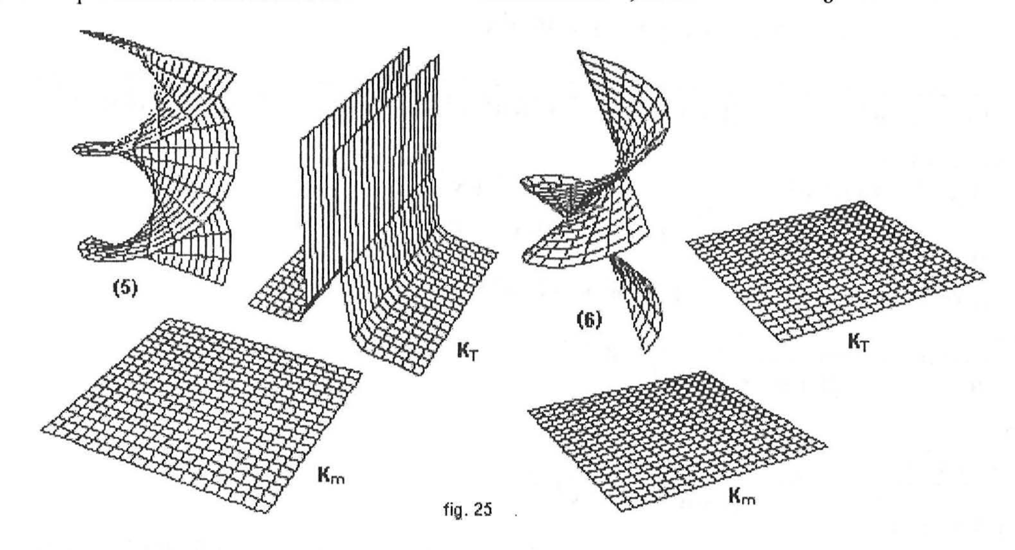


fig. 25

§ 11.-Las direcciones asintóticas.

En determinados puntos de algunas superficies puede ocurrir que la curvatura de alguna de las secciones normales tenga valor nulo. En la clasificación de los puntos de la superficie ya se ha contemplado el hecho de que alguna de las curvaturas principales en determinados puntos sean ellas mismas nulas. La propia fórmula de Euler $_{(1)}$ muestra esta posibilidad cuando en un punto **P** las curvaturas principales, siendo no nulas, tienen diferentes signos ya que con $\mathbf{k(\theta)}$ función continua, esta circunstancia se verifica necesariamente para dos valores del parámetro "θ" ($\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2 = -\theta_1$) que se traducen en dos direcciones, $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in \mathbf{T_P}$, para las cuales $\mathbf{k}(\underline{a}_1) = \mathbf{k}(\underline{a}_2) = \mathbf{0}$ (figura 26), siendo, como se sabe, "θ" el ángulo que forma cualquier dirección del plano tangente, en **P**, con cualquiera de las direcciones principales –tomada como referencia– en el punto. A estas direcciones –determinadas por vectores en el plano tangente de cada punto– en el que la curvatura de la correspondiente sección normal se anula, las denominamos "**direcciones asintóticas**" de la superficie en el punto en cuestión.

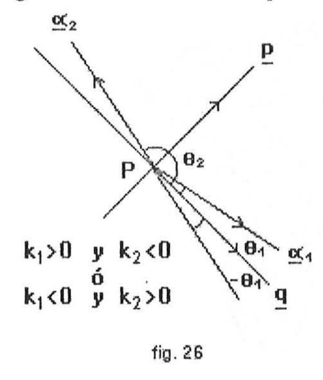


fig. 26

Las direcciones asintóticas existen, trivialmente, si la superficie contiene rectas, ya que a lo largo de las mismas y en cualquiera de sus puntos siempre existirá un plano de sección normal – determinado en el punto por la propia dirección de la recta y por la dirección de la normal a la superficie – cuya sección con la superficie será la propia recta y por lo tanto con curvatura nula. La dirección de cualquier recta contenida en una superficie es, por tanto, en cada uno de sus puntos, una dirección asintótica de la superficie. Si por un punto de una superficie pasan dos rectas, contenidas en la superficie, sus direcciones determinarán las dos únicas direcciones asintóticas de la superficie en tal punto y, en el caso de que por un punto de una superficie pasen tres rectas contenidas en la superficie, el punto resultará ser necesariamente un punto plano y todas las direcciones resultarán ser direcciones de curvatura nula.

Según lo dicho, en las superficies regladas las generatrices rectas –que están contenidas en el plano tangente a la superficie en cada punto– determinan una de las direcciones asintóticas de la superficie. En las

regladas desarrollables esta dirección asintótica es única en cada punto y coincide con una de las direcciones principales por lo que k_1 o bien k_2 será cero. En las regladas alabeadas, existirá, además, otra dirección asintótica en cada punto además de la dirección de la generatriz y formarán un cierto ángulo variable con las direcciones principales.

Todo lo anterior se deduce con bastante facilidad de la propia fórmula de **Euler**, conociendo la noción de curvatura de flexión de curvas y teniendo en cuenta el tipo de superficie y las distintas posibilidades que pueden presentarse, pero puede ser deducido por los procedimientos ordinarios del cálculo de las direcciones asintóticas que a continuación expondremos. No obstante, se adivina ya que existirán puntos sobre determinadas superficies que, no conteniendo rectas, tendrán sin embargo direcciones de curvatura normal nula debido a que la sección normal presenta un punto de inflexión.

En un punto **P** de una superficie $\underline{\mathbf{r}}\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ y para un vector $\underline{\alpha} \in \mathbf{T_P}$, con $\underline{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$: $\underline{\alpha} = \alpha_1\, \underline{\mathbf{r}}_u + \alpha_2\, \underline{\mathbf{r}}_v$, las direcciones asintóticas deberán verificar según $_{(10)}$:

$$\mathbf{k_n}\,(\{\alpha_1, \alpha_2\}) = \frac{e\,\alpha_1^2 + 2\,f\,\alpha_1\,\alpha_2 + g\,\alpha_2^2}{E\,\alpha_1^2 + 2\,F\,\alpha_1\,\alpha_2 + G\,\alpha_2^2} = 0$$

y, no siendo nulo el denominador para ningún vector $\underline{\alpha} \neq \mathbf{0}$, esta condición equivale a la ecuación:

$$\mathbf{e\,\alpha_1^2 + 2\,f\,\alpha_1\,\alpha_2 + g\,\alpha_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^*\,\alpha_1^2 + 2\,f^*\,\alpha_1\,\alpha_2 + g^*\,\alpha_2^2 = 0} \qquad (15)$$

que nos permitirá determinar los pares α_1, α_2 que definen las direcciones $\underline{\alpha}$ asintóticas.

Si ensayamos la forma $\underline{\alpha} = \{\mathbf{1}, \alpha\}$, excluyendo, por el momento, el caso en que $\underline{\alpha} = \underline{\mathbf{r}}_v$, obtendremos para α la condición:

$$\mathbf{g\,\alpha^2 + 2\,f\,\alpha + e = 0}, \qquad \text{o bien:} \qquad \mathbf{g^*\,\alpha^2 + 2\,f^*\,\alpha + e^* = 0}, \qquad (16)$$

cuyas soluciones son: $\alpha = \dfrac{-f \pm \sqrt{f^2 - e\,g}}{g}$. Este resultado proporciona direcciones asintóticas reales solamente en el caso en que: $\mathbf{f^2 - e\,g \geq 0}$, ó bien: $\mathbf{f^{*2} - e^*\,g^* \geq 0}$, o sea: exclusivamente en puntos hiperbólicos – con dos soluciones –, o parabólicos – una solución –.

La no exclusión de valores complejos da lugar a la introducción de los imaginarios en la teoría de las superficies y consecuentemente a la definición de líneas asintóticas – imaginarias – (isotrópicas o isótropas), en superficies tales como una esfera o un elipsoide. La propia fórmula de **Euler** puede no verificarse en el campo de los números complejos.

Limitándonos al caso de valores reales en superficies reales –sobre las que se pueden trazar curvas reales–, nos encontramos, como era de esperar por lo dicho al principio, con dos direcciones asintóticas en cada punto regular hiperbólico en el que:
$\mathbf{e\,g - f^2 \leq 0}$ o bien $\mathbf{e^*\,g^* - f^{*2} \leq 0}$, que resultarán ser, con $\mathbf{g \neq 0}$:

$$\underline{\alpha}_1 = \{1, -\frac{f}{g} + \frac{\sqrt{f^2 - e\,g}}{g}\} \equiv \{g, -f + \sqrt{f^2 - e\,g}\}, \text{ o bien } \underline{\alpha}_1 = \{g^*, -f^* + \sqrt{f^{*2} - e^*g^*}\},$$

$$\underline{\alpha}_2 = \{1, -\frac{f}{g} - \frac{\sqrt{f^2 - e\,g}}{g}\} \equiv \{g, -f - \sqrt{f^2 - e\,g}\}, \text{ o bien } \underline{\alpha}_2 = \{g^*, -f^* - \sqrt{f^{*2} - e^*g^*}\}.$$

Si $\mathbf{g = 0}$ en el punto en cuestión, $\alpha_1 = \mathbf{0}$ es una solución de $_{(15)}$, así que una de las direcciones asintóticas coincide con $\underline{\mathbf{r}}_v$, que es el caso excluido al trabajar con la forma $\{\mathbf{1}, \alpha\}$. La propia ecuación $_{(15)}$ proporciona, además, la segunda solución: $\alpha_2 = -\dfrac{e}{2f}$, si $\mathbf{f \neq 0}$, de manera que en estas condiciones:

$$\underline{\alpha}_1 = \{0, 1\} = \underline{\mathbf{r}}_v \;\; \text{y} \;\; \underline{\alpha}_2 = \{1, -\frac{e}{2f}\} \equiv \{2f, -e\}, \text{ o bien } \underline{\alpha}_2 = \{2\,f^*, -e^*\},\; g = 0,\; f \neq 0.$$

En los puntos parabólicos, en los que: $\mathbf{e\,g - f^2 = 0}$, o bien: $\mathbf{e^*\,g^* - f^{*2} = 0}$, existirá una sola dirección asintótica:

$\underline{\alpha} = \{1, -\dfrac{f}{g}\} \equiv \{g, -f\}$, o bien $\underline{\alpha} = \{g^*, -f^*\}$, que resulta ser, además, una dirección principal de curvatura:

$$\begin{vmatrix} \frac{f^2}{g^2} & \frac{f}{g} & 1 \\ e & f & g \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0, \text{ si } e\,g - f^2 = 0 \;,\; g \neq 0,$$

y, en el caso de ser, además, $g = 0$, y por lo tanto necesariamente $f = 0$, coincidirá con la dirección $\underline{r}_v$:
$\underline{\alpha} = \underline{r}_v = \underline{p}$, si $g = 0, f = 0$ ($e\,g - f^2 = 0$).

Finalmente, cuando en un punto se verifica $e = f = g = 0$, condiciones que caracterizan los puntos planos, todas las direcciones serán direcciones de curvatura normal nula o asintóticas por lo que quedan indeterminadas.

Resumiendo: las reglas básicas para el cálculo de las direcciones asintóticas, en un punto regular de una superficie, pueden establecerse con los siguientes criterios compatibles entre sí:

a) Existen direcciones asintóticas – reales – solamente en los puntos en que $e\,g - f^2 \leq 0$.
b) Pueden obtenerse en la forma $\underline{\alpha} = \underline{r}_u + \alpha\,\underline{r}_v$, en la que el valor "$\alpha$" satisface la ecuación algebraica: $g\,\alpha^2 + 2\,f\,\alpha + e = 0$, o bien: $g^*\,\alpha^2 + 2\,f^*\,\alpha + e^* = 0$.
c) Si $g = 0$, una de las direcciones asintóticas coincide con $\underline{r}_v$.

Se comprueba, por ejemplo, que cuando $e = g = 0$, ($f \neq 0$), el punto – hiperbólico – tiene dos direcciones asintóticas que coinciden con las direcciones $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$; este caso, junto a otros varios, se citará en el **§ 15**.

Se puede añadir que las direcciones asintóticas en un punto hiperbólico resultan ser las direcciones de las asíntotas de su indicatriz de **Dupin** – un par de hipérbolas conjugadas – definida en el plano tangente T_P. De hecho, estas direcciones pueden ser introducidas conceptualmente desde esta curva. En los puntos parabólicos, la única asíntota de la indicatriz tiene como dirección la del par de rectas en que degenera la cónica, que resulta ser, además, una de las direcciones principales.

Como ejemplo, tomaremos la superficie de traslación $\underline{r}(u, v) = \{\cos u, v^2 + \operatorname{sen} u, v\}$, en la que:
$\underline{r}_u = \{-\operatorname{sen} u, \cos u, 0\}$, $\underline{r}_v = \{0, 2v, 1\}$, $\underline{r}_{uu} = \{-\cos u, -\operatorname{sen} u, 0\}$, $\underline{r}_{uv} = 0$, $\underline{r}_{vv} = \{0, 2, 0\}$,
de aquí pueden obtenerse genéricamente las funciones:

$$e^*(u, v) = \begin{vmatrix} -\cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 2v & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad f^*(u, v) = 0, \qquad g^*(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 2v & 1 \end{vmatrix} = 2 \operatorname{sen} u.$$

Si consideramos, por ejemplo, el punto $P \equiv (0, -1, 0) \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2}$, $v = 0$, estas funciones toman los valores: $e^* = -1$, $f^* = 0$, $g^* = -2$; $e^*\,g^* - f^{*2} > 0$. El punto es elíptico y por lo tanto carece de direcciones asintóticas –reales–.

Si consideramos el punto $Q \equiv (1, 0, 0) \Leftrightarrow u = 0$, $v = 0$, las funciones tomarán ahora los valores:
$e^* = -1$, $f^* = 0$, $g^* = 0$; $e^*g^* - f^{*2} = 0$; el punto es parabólico, con una dirección asintótica que, al ser $g^* = 0$, coincide con $\underline{r}_v$. Esta dirección es, además, una dirección principal, así que: $\underline{\alpha} = \underline{p} = \underline{r}_v = \{0, 0, 1\}$.

Finalmente, en el punto $R \equiv (0, 1, 0) \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$, se obtienen los valores: $e^* = -1$, $f^* = 0$, $g^* = 2$; $e^*g^* - f^{*2} < 0$.
El punto es hiperbólico, las soluciones de la ecuación:

$$g^*\,\alpha^2 + 2\,f^*\,\alpha + e^* = 0 \;\Rightarrow\; 2\,\alpha^2 - 1 = 0 \text{ son: } \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\; \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

así que con $\underline{r}_u = \{-1, 0, 0\}$, $\underline{r}_v = \{0, 0, 1\}$, las direcciones asintóticas resultarán ser:

$$\underline{\alpha}_1 = \underline{r}_u + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{r}_v = \{-1, 0, 0\} + \frac{1}{\sqrt{2}}\{0, 0, 1\} = \{-1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\} \equiv \{-\sqrt{2}, 0, 1\},$$

$$\underline{\alpha}_2 = \underline{r}_u - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\underline{r}_v = \{-1, 0, 0\} - \frac{1}{\sqrt{2}}\{0, 0, 1\} = \{-1, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\} \equiv \{-\sqrt{2}, 0, -1\},$$

y formarán un ángulo: $\cos(\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2) = \dfrac{\{-\sqrt{2}, 0, 1\}.\{-\sqrt{2}, 0, -1\}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \dfrac{1}{3}$.

Centrémonos ahora en el caso en el que existan dos direcciones asintóticas $\underline{\alpha}_1$ y $\underline{\alpha}_2$, caso que corresponde a los puntos hiperbólicos. Con **g* ≠ 0**, el ángulo entre ambas vendrá medido, en general, por:

$$\cos(\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2)=\frac{\underline{\alpha}_1.\underline{\alpha}_2}{|\underline{\alpha}_1||\underline{\alpha}_2|}=\frac{(\underline{r}_u+\alpha_1\underline{r}_v)(\underline{r}_u+\alpha_2\underline{r}_v)}{\sqrt{(\underline{r}_u+\alpha_1\underline{r}_v)^2}\sqrt{(\underline{r}_u+\alpha_2\underline{r}_v)^2}}=\frac{E+F(\alpha_1+\alpha_2)+G\,\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{E+2F\alpha_1+G\alpha_1^2}\sqrt{E+2F\alpha_2+G\alpha_2^2}},$$

y, puesto que α_1, α_2 son soluciones de la ecuación $_{(16)}$, verificarán: $\alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{2f}{g}$, $\alpha_1 . \alpha_2=\dfrac{e}{g}$, así que:

$$\cos(\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2)=\frac{1}{g}\,\frac{Eg-2fF+gE}{\sqrt{E+2F\alpha_1+G\alpha_1^2}\sqrt{E+2F\alpha_2+G\alpha_2^2}}\quad ,g\neq 0.$$

Podemos interesarnos ahora por el caso particular en que estas direcciones resultan ser ortogonales. Esta circunstancia se verificará cuando: **Eg –2f F + gE = 0, (g ≠ 0)**, y teniendo en cuenta el valor de la curvatura media deducido directamente de la ecuación $_{(13)}$: $k_m=\dfrac{1}{2}(k_1+k_2)=\dfrac{1}{2}\dfrac{eG-2fF+gE}{EG-F^2}$, la condición puede escribirse:

$$eG-2fF+gE=(EG-F^2)(k_1+k_2)=2k_m(EG-F^2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad k_m=0,\ \ (EG-F^2\neq 0),$$

así que cuando las direcciones asintóticas son ortogonales la curvatura media de la superficie en un punto hiperbólico es nula. La proposición recíproca se verifica trivialmente. En este caso, la ecuación $_{(13)}$ y sus soluciones –las curvatura principales– resultan ser:

$$k^2+\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=0 \quad\Rightarrow\quad k=\pm\sqrt{\frac{f^2-eg}{EG-F^2}}=k_1,\,k_2.$$

Si **g = 0**: $\underline{\alpha}_1=\underline{r}_v$ y $\underline{\alpha}_2=\{-2f,e\}$, así que:

$$\cos(\underline{\alpha}_1,\underline{\alpha}_2)=\frac{Eg-2fF}{\sqrt{E+2F\alpha_1+G\alpha_1^2}\sqrt{E+2F\alpha_2+G\alpha_2^2}}$$

y serán ortogonales si **Eg –2f F = 0**, de manera que la condición
e G –2f F + gE = 0
puede considerarse válida en cualquiera de los casos (**g = 0 ó g ≠ 0**).

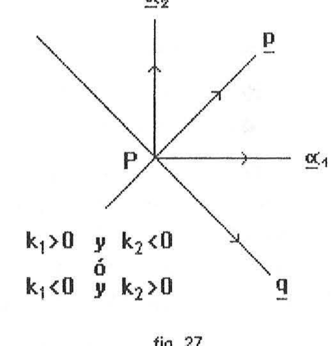


fig. 27

Finalmente, al ser las direcciones principales ortogonales entre sí, si también lo son las direcciones asintóticas que formarán 45° con las principales (figura 27). La indicatriz está compuesta por hipérbolas equiláteras.

Las superficies en las que las direcciones asintóticas son ortogonales en todos sus puntos determinan superficies **de curvatura media nula**, en las que las curvaturas principales en cada punto son iguales pero de signos contrarios: $k_1,\,k_2=\pm\sqrt{\dfrac{f^2-eg}{EG-F^2}}$. Estas superficies son conocidas como **superficies mínimas**. A ellas les dedicaremos algunas notas descriptivas –más que nada históricas– en el **§ 17** por su importancia en muy diferentes campos de investigación y por su interés actual desde el punto de vista del diseño.

§ 12.-Líneas de curvatura y líneas asintóticas en una superficie regular. Líneas nodales.

Ya se ha visto en **§ 6** que para determinar curvas trazadas sobre una superficie parametrizada $\underline{r}$ **(u, v)** bastará disponer, en general, del par de ecuaciones **u = u(θ)** , **v = v(θ)**, en las que los parámetros de la superficie se expresan en función de un parámetro cualquiera "θ". También se precisó que puede utilizarse, alternativamente, cualquiera de los propios parámetros de la superficie para determinar esta curva con la sola ecuación **v = v(u)**, ó bien con la **u = u(v)**, que sigue la forma general, si se quiere, del par de ecuaciones **u = u**, **v = v(u)**, ó bien **u = u(v)**, **v = v**, respectivamente.

Cuando nos proponemos determinar algunas curvas sobre la superficie condicionadas por relaciones que involucran sus tangentes, podemos suponerlas expresadas en cualquiera de las formas anteriores y, consecuentemente, expresar la dirección de sus tangentes en cada punto **P** de la curva por sus componentes en la base $[\underline{r}_u,\ \underline{r}_v]$ de T_P, independientemente de que esta base varíe de un punto a otro de la curva sobre la superficie. Así, si suponemos la curva expresada por el par de ecuaciones **u = u(θ)** , **v = v(θ)**, según lo dicho en **§ 6**, la

dirección de su tangente será la $\{\dot{u}(\theta), \dot{v}(\theta)\}$, si la suponemos expresada mediante $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u})$, será la $\{1, \dot{v}(u)\}$, y si por $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{v})$, vendrá definida por $\{\dot{u}(v), 1\}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, en algunos casos se pueden obtener curvas sobre la superficie, determinadas por condiciones de sus tangentes, a través de la integración de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden expresada en su forma normal.

Las propias líneas coordenadas, vinculadas estrechamente, como se sabe, con la propia parametrización elegida en la representación de la superficie, pueden ser aquí obtenidas como las curvas tales que en sus tangentes tienen, en cada uno de sus puntos, una dirección coincidente con la de los propios vectores $\underline{r}_u$ ó $\underline{r}_v$, respectivamente; es decir: con las direcciones $\{1, 0\}$ ó $\{0, 1\}$ en la propia base de $\mathbf{T_P}$. En el primer caso podemos suponerlas definidas por $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u})$, con lo que las curvas cuyas tangentes tienen la dirección de $\underline{r}_u$ deberán satisfacer:

$$\{1, \dot{v}(u)\} = \{1, 0\}, \text{ y de aquí: } \dot{v}(u) = \frac{dv}{du} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = cte,$$

que son las "**curvas u**" o "**curvas v =cte**". En el segundo caso, supondremos las curvas sobre la superficie expresadas en la forma $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{v})$, y aquellas cuyas tangentes tienen en cada uno de sus puntos la dirección de $\underline{r}_v$ deberán satisfacer:

$$\{\dot{u}(v), 1\} = \{0, 1\}, \text{ y de aquí: } \dot{u}(v) = \frac{du}{dv} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = cte.,$$

que son las "**curvas v**" o "**curvas u =cte**".

Podemos ahora plantearnos distintas congruencias de curvas sobre la superficie vinculadas, de una u otra manera, a la propia forma de la superficie y que pueden, por lo tanto, describirla con diferentes ventajas.

Nos referiremos, en primer lugar, a las familias de curvas sobre la superficie tales que sus tangentes tengan como dirección, en cada uno de sus puntos, las propias direcciones principales de la superficie. Estas son las denominadas "**líneas de curvatura principal**" o simplemente "**líneas de curvatura**" de la superficie. Las líneas de curvatura principal pueden ser así definidas como las curvas integrales del campo de direcciones principales. No se debe de olvidar que los puntos úmbílicos son singularidades de estos campos.

Las líneas de curvatura principal más los puntos umbílicos constituyen la configuración principal de la superficie. Fue **Monge**, en 1796, el primero en destacar la importancia de esta configuración que se puede encontrar en su "Application de l'Analyse à la géométrie". Cours historiques de l'Ecole Polytechnique, 1807. El avance definitivo lo dió **Darboux** cien años después.

Toda vez que, preferentemente, hemos utilizado los métodos simplificados del § 9, con las direcciones principales en la forma $\{1, \lambda\}$, podemos, consecuentemente, intentar describir estas curvas en la forma $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u})$, con sus tangentes en la dirección $\{1, \dot{v}(u)\}$. Bastará entonces resolver la ecuación algebraica $_{(14)}$ para todos y cada uno de los puntos de la región de la superficie considerada. Es decir, resolver en la forma genérica la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ e^*(u,v) & f^*(u,v) & g^*(u,v) \\ E(u,v) & F(u,v) & G(u,v) \end{vmatrix} = 0, \qquad (17)$$

obteniendo las direcciones principales $\{1, \lambda_1(u, v)\}$ y $\{1, \lambda_2(u, v)\}$, y resolver las ecuaciones diferenciales:

$$\dot{v}(u) = \frac{dv}{du} = \lambda_1(u, v), \text{ consecuencia de la condición } \{1, \dot{v}(u)\} = \{1, \lambda_1(u, v)\}, \qquad (18.a)$$

$$\dot{v}(u) = \frac{dv}{du} = \lambda_2(u, v), \text{ consecuencia de la condición } \{1, \dot{v}(u)\} = \{1, \lambda_2(u, v)\}, \qquad (18.b)$$

de donde podrían obtenerse, respectivamente, las familias de curvas: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1(\mathbf{u}, \mathbf{C})$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2(\mathbf{u}, \mathbf{C})$, en las que "**u**" pasa a ser el parámetro de las curvas obtenidas, y "**C**" el parámetro arbitrario del haz. Las líneas de curvatura principal quedarían representadas – independientemente de la propia superficie – por las parametrizaciones:

$$\underline{r}(u, v_1(u, C)) = \underline{r}_1^*(u, C) \qquad \text{y} \qquad \underline{r}(u, v_2(u, C)) = \underline{r}_2^*(u, C).$$

El problema del cálculo de las parametrizaciones de estas líneas de curvatura queda así planteado de forma muy sencilla, pero su determinación práctica, sean cuales sean los procedimientos empleados, no suele resultar un problema elemental. En primer lugar, la propia ecuación algebraica $_{(17)}$ puede tener raíces muy complicadas, pero además las soluciones de las ecuaciones diferenciales $_{(18)}$ deberán ser, no solo expresables en términos de funciones elementales, sino que las propias ecuaciones deben poder ser resolubles elementalmente o, al menos, abordables con otros métodos de investigación directa dentro de la propia teoría de funciones. A pesar de todo esto, podemos

obtener algunas representaciones paramétricas de las líneas de curvatura de forma completamente elemental en diferentes casos, algunos de ellos muy representativos. De cualquier manera, aunque dentro de otro contexto diferente, siempre se dispone de los métodos numéricos – hoy día generalizados con el auxilio de los ordenadores – para aproximar o reconstruir estas líneas sobre cualquier superficie.

Por ejemplo, en el paraboloide elíptico $\{u, v, u^2+v^2\}$: $E=1+4u^2$, $F=4uv$, $G=1+4v^2$, $e^*=2$, $f^*=0$, $g^*=2$, y las direcciones principales pueden obtenerse en cualquier punto de la superficie resolviendo la ecuación:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1+4u^2 & 4uv & 1+4v^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{u^2-v^2}{uv}\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{v}{u},\ \lambda_2 = -\frac{u}{v}.$$

Una de las familias de curvatura principal se obtiene a través de la integración de la ecuación:

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} \quad \Rightarrow \quad v = C\,u,$$

que proporciona la familia de curvas parametrizadas $\{u, C\,u, (1+C^2)\,u^2\}$, parábolas en planos $y = C\,x$;
una segunda familia se obtiene de la integración de la ecuación:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad u^2 + v^2 = C^2,$$

solución que puede describirse mejor utilizando ahora un tercer parámetro, con $u = C\cos\theta$, $v = C\operatorname{sen}\theta$, con lo que se obtienen las curvas $\{C\cos\theta, C\operatorname{sen}\theta, C^2\}$, que son circunferencias en planos $z = C^2$.

Con el mismo procedimiento – y con problemas parecidos para su determinación práctica –, podemos buscar los conjuntos de líneas sobre la superficie tales que las tangentes en cada uno de sus puntos tengan como direcciones las asintóticas de la superficie, en regiones en que, obviamente, tengamos excluidos los puntos elípticos. Estas serán las denominadas "**líneas asintóticas de la superficie**".

Como consecuencia de resolver la ecuación $_{(16)}$ con coeficientes genéricos:
$g^*(u, v)\ \alpha^2 + 2 f^*(u, v)\ \alpha + e^*(u, v) = 0$,
pueden obtenerse para cada solución $\alpha(u, v)$, las direcciones asintóticas $\{1, \alpha(u, v)\}$. La búsqueda de estas líneas en la forma $v = v(u)$, pasa por la integración de la ecuación diferencial

$$\dot v(u) = \frac{dv}{du} = \alpha(u, v), \text{ consecuencia de la condición } \{1, \dot v(u)\} = \{1, \alpha(u, v)\} \qquad (19)$$

que nos puede proporcionar la solución $v = v(u, C)$, determinando la parametrización de la familia de líneas:
$\underline{r}(u, v(u, C)) = \underline{r}^*(u, C)$.

Así, en el paraboloide hiperbólico $\{u, v, u^2 - v^2\}$, con $e^*=2$, $f^*=0$, $g^*= -2$, las direcciones asintóticas podrán ser obtenidas, en cualquier punto de la superficie, resolviendo la ecuación:
$-2\alpha^2 + 2 = 0 \Rightarrow \quad \alpha = \alpha(u, v) = \pm 1.$
y las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dv}{du} = 1 \quad \Rightarrow \quad v = u + C$$

$$\frac{dv}{du} = -1 \quad \Rightarrow \quad v = -u + C,$$

determinando, respectivamente las líneas $\{u, u + C, -2Cu - C^2\}$ y $\{u, -u + C, 2Cu - C^2\}$, que son los dos sistemas de generatrices rectas.

Finalmente, teniendo en cuenta todo lo dicho en § 9 y § 11,existen algunos casos en los que la determinación tanto de las líneas de curvatura como de las líneas asintóticas resulta inmediata:

a)- Si resulta ser $(f^*G - g^*F)(u, v) = 0$ en la región considerada, una de las direcciones asintóticas coincidirá en todos sus puntos con $\underline{r}_v$, así que una de las familias de líneas de curvatura principal coincidirá con las curvas coordenadas $u = cte$: $\underline{r}(C, v)$.

b)- Si resulta $(e^*F - f^*E)(u, v) = 0$ en la región considerada, una de las direcciones asintóticas coincidirá, en todos sus puntos con $\underline{r}_u$, así que una de las familias de líneas de curvatura principal coincidirá con las curvas coordenadas $v = cte$: $\underline{r}(u, C)$.

c)- Si **f*(u, v) = F(u, v) = 0**, se verifican los dos casos anteriores y las líneas de curvatura principal coinciden, respectivamente, con las curvas coordenadas **u = cte** y **v = cte** : $\underline{r}_1$ **(C, v)** y $\underline{r}_2$ **(u, C)**.

d)- Si **g*(u, v) = 0, (f*(u, v) ≠ 0)**, esta será una superficie de puntos hiperbólicos en la que una de las direcciones asintóticas coincidirá con $\underline{r}_v$, así que una de las familias de líneas asintóticas serán las curvas **u = cte** : $\underline{r}$ **(C, v)**.

e)- Si **e*(u, v) = 0, (f*(u, v) ≠ 0)**, será una superficie de puntos hiperbólicos en la que una de las direcciones asintóticas coincidirá con $\underline{r}_u$, así que una de las familias de líneas asintóticas serán las curvas **v = cte** : $\underline{r}$ **(u, C)**.

f)- Si en una región de la superficie **e*(u, v) = g*(u, v) = 0**, se verifican los dos casos anteriores: las líneas asintóticas coinciden, respectivamente, con las curvas coordenadas **u = cte** y **v = cte** : $\underline{r}_1$ **(C, v)** y $\underline{r}_2$ **(u, C)**, respectivamente.

Refiriéndonos a los dos casos más significativos entre los anteriores, en la parametrización del paraboloide elíptico **{u cos v, u sen v, u²}**, por ejemplo, resulta ser **F(u, v) = 0** y **f*(u, v) = 0** y, naturalmente, las líneas de curvatura resultan ser las líneas coordenadas **{C cos v, C sen v, C²}** y **{u cos C, u sen C, u²}**, respectivamente. En la parametrización del paraboloide hiperbólico **{ u+v, u –v, 4 u v}**, resulta **e*(u, v)= 0**, **g*(u, v) = 0** y las líneas asintóticas son aquí líneas coordenadas que pueden representarse por:**{C+v, C–v, 4 C v}** y **{u+C, u –C, 4 C u}**, respectivamente.

Como se ha dicho, las superficies pueden representarse por diferentes parametrizaciones, algunas más sencillas o más adecuadas que otras, que a través de las curvas coordenadas describen la superficie y que incluso pueden manifestar directamente algunas propiedades importantes de la misma. La elección de la parametrización, que puede verse como un problema asociado al diseño "constructivo" de la superficie, se convierte en un aspecto de bastante importancia. Por otra parte, las líneas de curvatura principal constituyen familias de curvas vinculadas a las características del análisis de la forma de la superficie. Todo lo anterior nos lleva directamente a plantearnos el problema de describir la superficie a través de sus propias líneas de curvatura principal, o sea: encontrar la parametrización $\underline{r}$ **(u, v)** de la superficie en la que sus líneas coordenadas coincidan con las líneas de curvatura principal, y en la que, según lo visto anteriormente, se debe verificar: **f *(u, v) = F (u, v) = 0**. Esta representación puede proporcionar notables ventajas – las ecuaciones de Gauss-Codazzi quedan, por ejemplo, muy simplificadas – en cualquier tipo de cálculo en el que los coeficientes de forma de la superficie sean lo predominante. Tal parametrización siempre es posible desde el punto de vista teórico, sin embargo, desde el punto de vista práctico, el problema de encontrarla puede ser muy complicado o directamente inabordable por los métodos tradicionales dentro de la teoría de funciones salvo en algunos tipos de superficies o en determinadas superficies particulares y, en el caso en que sea accesible, puede proporcionar complejas representaciones paramétricas que, por otra parte, complican innecesariamente otros muchos aspectos del análisis de la superficie, comenzando por la simple descripción de sus puntos por coordenadas cartesianas. Estas son las razones por las que en problemas asociados de una u otra manera con las superficies, como puede ser el estudio del equilibrio elástico-resistente de las láminas de pequeño espesor asimilables a estos objetos matemáticos, se descarta, en general, el caso en que las superficies utilizadas vengan referidas a sus líneas de curvatura, lo que no evita, en cualquier caso, que no se renuncie a precisar las importantes simplificaciones que introduciría en la teoría.

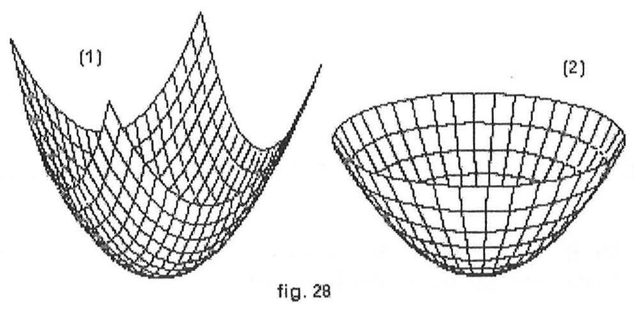


fig. 28

En la figura 28 se representa el paraboloide elíptico en una parametrización arbitraria tradicional:
{u+v, u –v, 2(u²+v²)}(1)
y la conocida representación:
{u cos v, u sen v, u²}(2)
en la que sus líneas coordenadas son líneas de curvatura.

En cuanto a las líneas asintóticas en las regiones en las que están perfectamente determinadas, podemos decir que, entre otras cosas, presentan un notable interés, por ejemplo, en el ámbito de las superficies regladas y de todos los problemas asociados, de una u otro forma, a estas superficies que, para nosotros, constituyen un campo destacado. Debido a que las familias de rectas contenidas en las superficies deben ser necesariamente líneas asintóticas de las mismas, la determinación de éstas puede constituir un medio para distinguir si una superficie parametrizada en cualquier forma arbitraria – no lineal en ninguno de sus parámetros – constituye una superficie reglada o no. En las superficies simplemente regladas descritas por parametrizaciones lineales en uno de sus dos

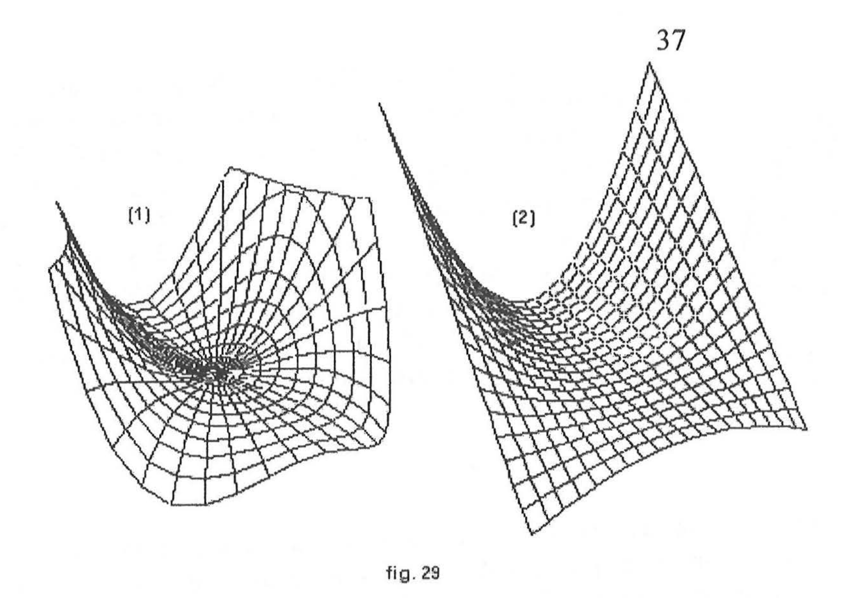


fig. 29

parámetros, la familia de rectas generatrices –una de las familias de líneas asintóticas – coinciden con una de las congruencias de curvas coordenadas, y se las puede denominar "parametrizaciones regladas" de las superficies, por manifestar directamente su carácter reglado; en ellas se verifica o bien **e*(u, v) = 0**, ó bien **g*(u, v) = 0**.

En la teoría de la flexión de cáscaras delgadas las líneas asintóticas juegan un importante papel y más aún en las asimilables a superficies regladas de curvatura simple en las que las generatrices aparecen, trivialmente, como líneas de "fragilidad" o de deformabilidad elástica. Este aspecto se citará en el **§ 19**.

En la figura 29 se ha representado en (1) un fragmento de conoide –una superficie reglada que puede generarse de diferentes maneras– en torno a un punto, que se muestra como singular, con una parametrización arbitraria de la superficie cuyas líneas coordenadas no muestran el carácter reglado de la misma, y un fragmento (2) de la misma superficie en torno al mismo punto, representado con su "parametrización reglada", en el que una de las familias de curvas coordenadas coincide con las generatrices y que muestra, explícitamente, su carácter reglado.

Así mismo es posible obtener, con carácter general desde el punto de vista teórico, para superficies de puntos hiperbólicos, una parametrización en la que las líneas asintóticas sean las curvas coordenadas, **e*(u, v)= 0** y **g*(u, v) = 0**. Este problema resulta más accesible, desde el punto de vista práctico, en el ámbito de las superficies regladas. En la figura 30 se representan diferentes parametrizaciones del paraboloide hiperbólico: una parametrización arbitraria – con el mismo criterio utilizado en la figura 29 –, no lineal en ninguno de sus parámetros: $\{u \cos v,\ u \operatorname{sen} v,\ u^2 (\cos^2 v - \operatorname{sen}^2 v)\}$(1), que presenta un punto singular en el origen de coordenadas, la representación no lineal tradicional $\{u,\ v,\ u^2 - v^2\}$(2) – una forma de **Monge** –, en la que se manifiesta su carácter de superficie de traslación, y la representación $\{u+v,\ u - v,\ 4\,u\,v\}$(3), en la que se manifiesta explícitamente su carácter doblemente reglado y en la que sus curvas coordenadas coinciden con las dos familias de líneas asintóticas que son las dos familias de generatrices rectas.

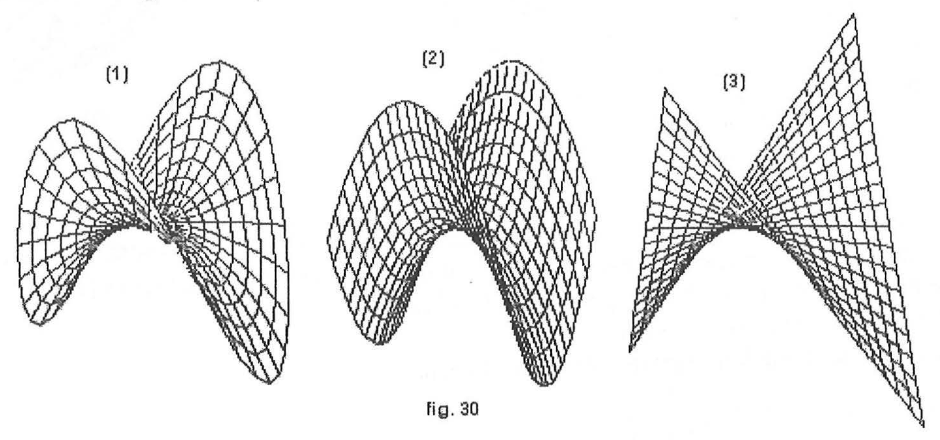


fig. 30

Cabe añadir que podemos obtener las líneas parabólicas o nodales de una superficie –si las hay–, resolviendo la ecuación genérica: $e^*(u, v)\, g^*(u, v) - f^{*2}(u, v) = 0$, con $e^{*2} + f^{*2} + g^{*2} \neq 0$; de ella pueden obtenerse relaciones $v = \phi(u)$ o bien $u = \varphi(v)$ que nos permitirán definir sobre la parametrización de la superficie las líneas nodales más, eventualmente, otros puntos parabólicos de la superficie.

Así, en la superficie toroidal $\{(2+ \cos v) \cos u,\ (2+ \cos v) \operatorname{sen} u,\ \operatorname{sen} v\}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$, obtenemos: $E = (2+ \cos v)^2$, $F = 0$, $G = 1$; $e = -\cos v\,(2 + \cos v)$, $f = 0$, $g = -1$; $e^* g^* - f^{*2} = \cos v\,(2+ \cos v)$,

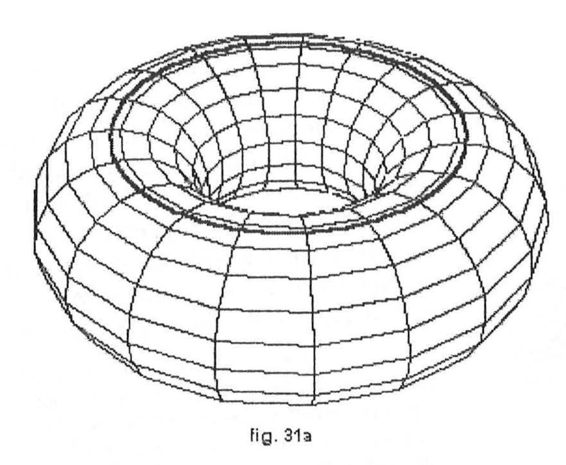


fig. 31a

estando por tanto la superficie referida a sus líneas de curvatura principal. Esta superficie carece de puntos umbílicos o planos. Sus puntos serán elípticos en la región $\mathbf{v \in [0, \pi/2)}$, $\mathbf{v \in (3\pi/2, 2\pi]}$, para cualquier valor de **u**, en que $\mathbf{e^*g^* - f^{*2} > 0}$, e hiperbólicos para $\mathbf{v \in (\pi/2, 3\pi/2)}$. Las líneas parabólicas de la superficie se obtienen para $\mathbf{\cos v = 0 \Rightarrow v = \pi/2}$ y $\mathbf{v = 3\pi/2}$, que determinan sobre la parametrización de la superficie las curvas: **{2 cos u, 2 sen u, 1}** y **{2 cos u, 2 sen u, –1}**, que son las circunferencias $\mathbf{x^2 + y^2 = 4}$, $\mathbf{z = \pm 1}$, una de las cuales se representa, destacada, sobre la superficie en la figura 31a.

Finalmente, podemos referirnos a un interesante aspecto que consiste en describir el comportamiento y los límites de las líneas asintóticas en superficies que comparten, por ejemplo, regiones de puntos hiperbólicos –en las que existen dos familias de tales líneas– con regiones de puntos elípticos –en las que no las hay–. Este es el caso más simple de toda la variedad de casos posibles y ocurre en superficies muy notorias como la anterior. Ya dijimos en el § **4** que ambas regiones deberán estar separadas por líneas nodales de puntos parabólicos y en la figura 31b se describe gráficamente este comportamiento sobre el toro: las dos familias de líneas asintóticas de la región "interna" de la superficie son tangentes asintóticamente a la línea nodal –que es también una línea asintótica– y que limita y "cierra" la región, mientras al otro lado, en la región "externa" de la superficie, las líneas asintóticas no existen.

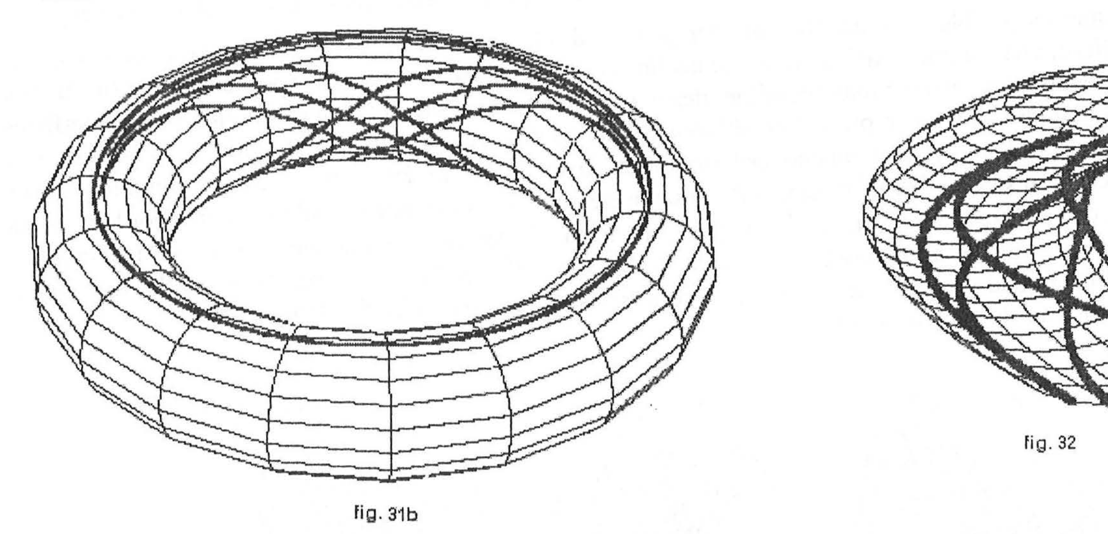


fig. 31b

fig. 32

Esta misma disposición se manifiesta en un ejemplo, más sencillo – pero representativo de los problemas que se presentan habitualmente en los cálculos –, como es el de la superficie de traslación $\mathbf{\{\cos u, v^2 + \text{sen}\, u, v\}}$ utilizada como ejemplo en el § **11**. Se obtiene para esta superficie:

$\mathbf{e^*(u, v) = -1,\ f^*(u, v) = 0,\ g^*(u, v) = 2\, \text{sen}\, u}$.

Las direcciones asintóticas, en cualquier punto, satisfacen la ecuación:

$$\mathbf{2\, \text{sen}\, u\ \alpha^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{1}{2\, \text{sen}\, u}},$$

y las líneas asintóticas pasan por resolver la ecuación diferencial: $\mathbf{\frac{dv}{du} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\, \text{sen}\, u}}}$ y por calcular la integral

$\mathbf{\int \frac{1}{\sqrt{2\, \text{sen}\, u}}\, du}$, que se convierte en una integral elíptica, no puede expresarse mediante funciones elementales, y por lo tanto queda proceder por métodos numéricos fragmento a fragmento. El resultado se expresa en la figura 32.

§ 13.-Caracterización vectorial de las líneas de curvatura y asintóticas.

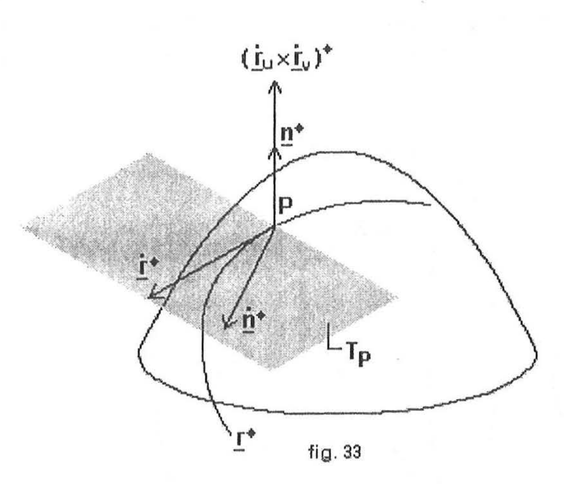


fig. 33

El par de funciones **u=u(θ), v=v(θ)**, determina sobre la superficie parametrizada **r (u, v)**, la curva parametrizada **r (u(θ), v(θ)) = r *(θ)**.

El campo de tangentes a esta curva vendrá definido por la función vectorial **ṙ *(θ)** y el campo de vectores normales a la superficie restringido a los puntos de la curva por **n (u(θ), v(θ)) = n *(θ)**. Cada uno de los vectores **ṅ** *(θ) permanece, con **ṙ *(θ)**, en los respectivos planos tangentes a la superficie en cada uno de los puntos de la curva definida (figura 33). Ya hemos visto que la aplicación de **Weingarten** se convierte en un endomorfismo que hace corresponder estos dos vectores en cada punto: ℓ(ṙ *) = −ṅ *.

A lo largo de una línea de curvatura principal, ṙ * es una dirección principal (**p** ó **q** en la notación utilizada a lo largo del texto), así que resulta un autovector de ℓ, por lo que ℓ(ṙ *) = **k** ṙ *, siendo **k** cualquiera de las curvaturas principales ($\mathbf{k_1}$ ó $\mathbf{k_2}$ en la notación utilizada), por lo que:
k ṙ *= −ṅ * ó bien: **k ṙ * + ṅ *= 0.**
Cualquiera de las expresiones anteriores es conocida como la fórmula de **B. O. Rodrigues** – discípulo de **Monge** – y caracteriza vectorialmente cada familia de las líneas de curvatura sobre la superficie.

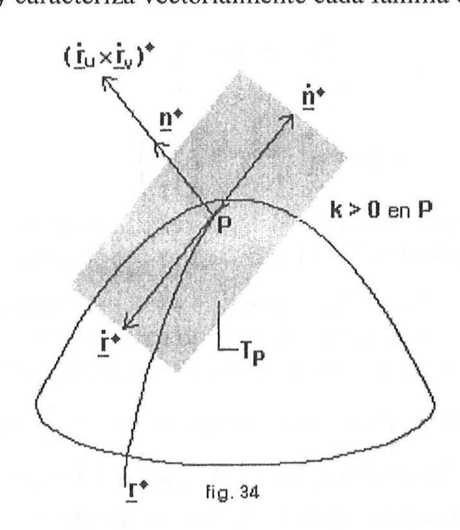


fig. 34

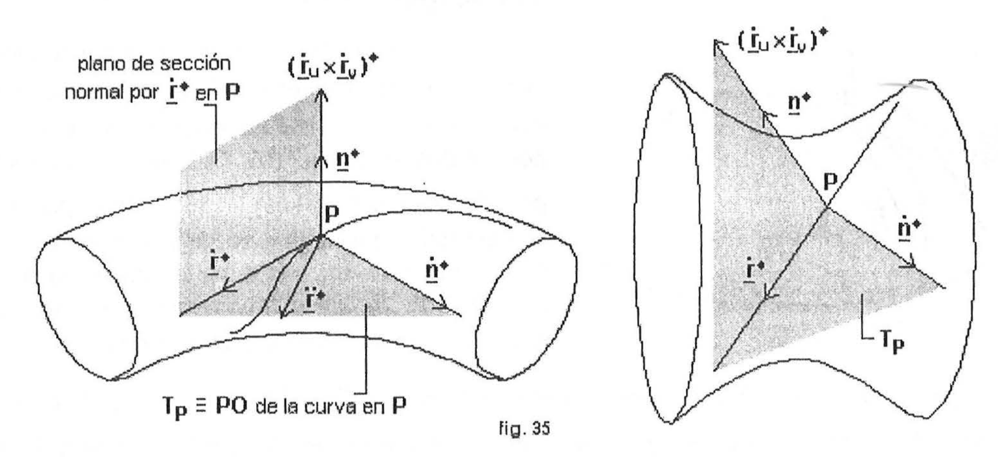
Es usual presentar la fórmula anterior suponiendo la curva expresada en su parámetro arco como consecuencia de su desarrollo deductivo; esto ofrece la ventaja de proporcionar la relación en términos de vectores que se conservan unitarios. En cualquier caso, la fórmula de **Rodrígues** indica, entre otras cosas, que sobre tales líneas de curvatura los vectores ṙ * y ṅ * tienen la misma dirección con sentidos opuestos si **k > 0**, y con el mismo sentido si **k < 0** (figura 34). El hecho de que **k=0**, es decir: cuando la línea sea asintótica y principal a la vez, no resta generalidad a la fórmula ya que en este caso **ṅ *= 0**; esto ocurre, por ejemplo, a lo largo de las generatrices de las superficies desarrollables o, sin ir más lejos, en las líneas nodales del toro de la figura 31a y 31b.

En las líneas asintóticas ṙ * es una dirección asintótica y se debe verificar por lo tanto: ṙ *. ℓ(ṙ *) = **0**, o sea, −ṙ *. ṅ * = **0**, resultando que ṙ * es normal a ṅ * a lo largo de todos los puntos de la línea, lo que constituye su característica vectorial. Esto convierte a **[**ṙ *, n *, ṅ ***]** en un triedro trirrectángulo. En estas condiciones, derivando ṙ *. n *= **0**, se obtiene: r̈ *. n * + ṙ *. ṅ *= **0**, y puesto que ṙ *. ṅ * = **0** ⇒ r̈ *. n * = **0**,
expresión que hay que leerla, como las anteriores, con su carácter genérico: r̈ *(θ). n *(θ) = **0**. Esta relación caracteriza, así mismo, a las líneas asintóticas y permite deducir que, puesto que en una superficie regular n ≠ **0**, se deberá verificar que o bien r̈ *= **0**, o bien que a lo largo de las líneas asintóticas, el vector r̈ * se encuentra también en el plano tangente a la superficie en cada uno de los puntos de la curva. Es así como se nos muestran los dos tipos de líneas asintóticas sobre una superficie:

I. r̈ *(θ) = **0**, la línea asintótica es una recta.

II. r̈ *(θ) se conserva normal a n *(θ), así que el plano tangente a la superficie en cada punto de la curva coincide con el plano osculador de la misma caracterizado por los vectores ṙ * y r̈ *. El vector n * tiene la dirección de la binormal a la curva en todos sus puntos y el triedro de **Frenet** coincide con el triedro **[** ṙ *, ṅ *, n ***]**.

De lo anterior se deduce que las líneas asintóticas de una superficie o bien son rectas o bien son curvas sobre la superficie tales que, en cada uno de sus puntos, el plano tangente a la superficie y el plano osculador de la curva coinciden (figura 35). En este último caso la línea asintótica, no siendo una recta, no tiene por qué tener curvatura de flexión nula, ni tampoco tiene que tenerla la posible sección de la superficie por su plano osculador –coincidente con el plano tangente a la superficie –.



§ 14.-Las dos primeras formas cuadráticas fundamentales.

En cualquier punto **P**, regular, de una superficie y para cualquier $\underline{a} \in T_P$, con $\underline{a} = a_1\, \underline{r}_u + a_2\, \underline{r}_v$, podemos definir las siguientes formas cuadráticas:

$$I_P(\underline{a}) = \underline{a}\,.\,\underline{a} = (a_1\, \underline{r}_u + a_2\, \underline{r}_v)\,(a_1\, \underline{r}_u + a_2\, \underline{r}_v) = E\; a_1^2 + 2\,F\, a_1\, a_2 + G\, a_2^2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

$$II_P(\underline{a}) = \underline{a}\,.\ell(\underline{a}) = (a_1\, \underline{r}_u + a_2\, \underline{r}_v)\,(-a_1\, \underline{n}_u - a_2\, \underline{n}_v) = e\; a_1^2 + 2\,f\, a_1\, a_2 + g\, a_2^2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

que son las denominadas primera (**I**) y segunda (**II**) formas cuadráticas fundamentales de la superficie en **P**. Los escalares **E**, **F**, **G** y los **e**, **f**, **g**, podemos pasar ahora a denominarlos "**coeficientes de la I y II formas cuadráticas**".

La primera forma cuadrática **I** representa simplemente el cómo se manifiesta el producto escalar ordinario en cada plano tangente de un punto **P**, o, si se quiere, en cómo hereda el plano tangente el producto escalar definido en $\Re^3$. Permite, fundamentalmente, expresar el modulo de cualquier vector $\underline{a} \in T_P$, desde la propia superficie, en la forma $|\underline{a}| = \sqrt{I(\underline{a})} = \sqrt{E\,a_1^2 + 2\,F\,a_1 a_2 + G\,a_2^2}$ y, desde el punto de vista formal, puede añadirse que al ser $E = \underline{r}_u^2 > 0$, $G = \underline{r}_v^2 > 0$ y $E\,G - F^2 = (\underline{r}_u \times \underline{r}_v)^2 > 0$, la **I** es una forma cuadrática definida positiva, $I(\underline{a}) \geq 0$; $I(\underline{a}) = 0$ solamente si $\underline{a} = 0$. Esta forma cuadrática gobierna los aspectos de medida sobre la superficie que son tres: el cálculo de la longitud de una curva sobre la superficie, el cálculo del ángulo entre dos curvas trazadas sobre la superficie –en un punto de intersección sobre la misma–, y la medida del área de una región de la superficie adecuadamente determinada por líneas sobre la misma. Después hay, naturalmente, otros problemas vinculados o relacionados con estos problemas básicos como puede ser, por ejemplo, el de determinar las trayectorias isogonales a una familia de curvas trazadas sobre la superficie, o más adelante todavía, podemos encontrar otros conjuntos de problemas, de diferente entidad e importancia vinculados a éstos, como son, por ejemplo, los problemas de mínimo.

Partiendo de las ecuaciones $u = u(\theta)$, $v = v(\theta)$ que determinan una curva sobre la superficie parametrizada $\underline{r}\,(u, v)$, podemos obtener fórmulas alternativas para, entre otros, los tres problemas básicos en los que intervienen los coeficientes **E**, **F**, **G**, –y naturalmente $EG - F^2$–. Trivialmente, si se dispone de tales ecuaciones que determinan la curva sobre la superficie y la propia superficie, los dos primeros problemas se pueden trasladar al ámbito del cálculo de las curvas parametrizadas, toda vez que podríamos trabajar con su representación $\underline{r}\,(u(\theta), v(\theta)) = \underline{r}\,^*(\theta)$. Sin embargo, la importancia de estas fórmulas alternativas se pone de manifiesto cuando justamente las propias curvas sobre la superficie son el objetivo del cálculo; es decir, cuando se pretende determinar curvas por propiedades de medida vinculadas al hecho de estar trazadas sobre una superficie determinada. No obstante, este tipo de problemas no se contemplan en este trabajo que se centra exclusivamente en caracterizar y describir aspectos de forma de las superficies, así que la **I** tiene aquí un papel, en cierto modo, secundario.

Por las cosas que ya sabemos de los coeficientes **e, f, g**, podemos deducir que la segunda forma cuadrática fundamental **II** resulta indefinida. Para interpretar la **II**, bastará tener en cuenta la fórmula $_{(7)}$ y considerar los correspondientes vectores unitarios $\underline{a}_1 = \underline{a}/|\underline{a}|$ de cualquier vector $\underline{a} \in T_P$ en un punto **P**:

$$II(\underline{a}_1) = \underline{a}_1 \cdot \ell(\underline{a}_1) = k_n(\underline{a}_1)\ (= k_n(\underline{a})),$$

así que si trabajamos con el conjunto de vectores unitarios $\underline{a}_1 \in C_P$ de T_P, la segunda forma cuadrática resulta ser idéntica a k_n, o, si se quiere: la segunda forma cuadrática fundamental aplicada a cualquier vector unitario de T_P nos ofrece directamente la curvatura de la sección normal correspondiente a esa dirección. Si partimos de la relación anterior, para obtener ahora la correspondiente fórmula de aplicación de la **II** a cualquier vector $\underline{a}$ no unitario, bastará tener en cuenta el carácter lineal de ℓ:

$$II(\underline{a}_1) = \underline{a}_1 \cdot \ell(\underline{a}_1) = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} \cdot \ell\left(\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}\right) = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|^2} \cdot \ell(\underline{a}) = \frac{\underline{a} \cdot \ell(\underline{a})}{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \frac{II(\underline{a})}{I(\underline{a})} \left(= \frac{e\,a_1^2 + 2\,f\,a_1 a_2 + g\,a_2^2}{E\,a_1^2 + 2\,F\,a_1 a_2 + G\,a_2^2}\right) = k_n(\underline{a}_1) = k_n(\underline{a}),$$

que es la importante fórmula $_{(10)}$ del **§ 8**.

Se formalizan así dos operaciones básicas en el análisis de los problemas de medida, gobernados directamente con la **I**, y en los problemas de caracterización de la forma, gobernados básicamente por la **II**, en su caso, auxiliada por la **I**. Por lo demás, son los respectivos coeficientes –como ya hemos visto– los que protagonizan los cálculos, así que es perfectamente posible omitir la introducción formal de ambas formas cuadráticas.

La segunda forma cuadrática fundamental permite expresar muchas de las diferentes cuestiones introducidas desde un lenguaje puramente formal. Así, por citar solamente un ejemplo, nos permite definir la propia indicatriz de **Dupin** en cada punto **P** de la superficie como "el lugar geométrico – sobre el plano tangente – de los extremos de los vectores con origen en **P** cuya segunda forma cuadrática fundamental sea la unidad".En efecto, si construimos el vector $\underline{d} = \sqrt{|\rho|}\ \cos\theta\ \underline{p}_1 + \sqrt{|\rho|}\ \mathrm{sen}\ \theta\ \underline{q}_1$, con $\underline{p}_1$ y $\underline{q}_1$ vectores unitarios de las direcciones principales, se verificará: $II\left(\frac{\underline{d}}{|\underline{d}|}\right) = \frac{II(\underline{d})}{I(\underline{d})} = \frac{II(\underline{d})}{|\rho|} = k_n(\underline{d}) = \frac{1}{|\rho|}$, así que: $II(\underline{d}) = 1$.

§ 15.-Los coeficientes e, f, g en la clasificación y determinación de las características de los puntos regulares. Algunos casos particulares.

En **§ 4** describimos la clasificación de las formas locales de la superficie teniendo en cuenta el valor que tomaba la curvatura de **Gauss**: $k_T = k_1\, k_2$. En el **§ 8** hemos obtenido el valor de k_T en función de los coeficientes de la **I** y de la **II**: $k_T = \dfrac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2}$.

Como se ve, la clasificación atiende solamente al signo de k_T. Al ser $E\ G - F^2 > 0$, se verificará, con $e^* = (\underline{r}_{uu}, \underline{r}_u, \underline{r}_v)$, $f^* = (\underline{r}_{uv}, \underline{r}_u, \underline{r}_v)$, $g^* = (\underline{r}_{vv}, \underline{r}_u, \underline{r}_v)$ que $\mathrm{sg}\ k_T = \mathrm{sg}\ (e\,g - f^2) = \mathrm{sg}\ (e^*\,g^* - f^{*2})$.

Por otra parte, los puntos umbílicos se caracterizaron por ser en ellos todas las curvaturas de sus secciones normales iguales y no nulas: $k_n = k_1 = k_2$, mientras que en los puntos planos, además, $k_n = k_1 = k_2 = 0$. En los puntos umbílicos podemos utilizar la fórmula $_{(10)}$ aplicándola, por ejemplo, a las direcciones **{1,0}**, **{0, 1}** y **{1,1}**, obteniendo:

$$k_n(\{1,0\}) = \frac{e}{E} = k_n(\{0,1\}) = \frac{g}{G} = k_n(\{1,1\}) = \frac{e + 2f + g}{E + 2F + G} \Rightarrow \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} \text{ ó bien: } \frac{e^*}{E} = \frac{f^*}{F} = \frac{g^*}{G},$$

relación que puede ser obtenida directamente de $_{(14)}$:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ e^* & f^* & g^* \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0,$$ en la que, cuando $\frac{e^*}{E} = \frac{f^*}{F} = \frac{g^*}{G}$, todas las direcciones resultan principales,

y, finalmente, puede deducirse también de la ecuación $_{(13)}$ que nos proporciona las curvaturas principales:

$$k^2 - \frac{e\,G - 2\,f\,F + g\,E}{E\,G - F^2}\,k + \frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2} = 0,$$

ya que tiene una raíz doble, $k_1 = k_2$, justamente cuando $\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$.

Si se trata de un punto plano, trivialmente se verificará: $e^* = f^* = g^* = 0$.

El resultado de todo ello es que los puntos regulares de una superficie pueden ahora clasificarse de la siguiente forma:

si $e^* g^* - f^{*2} > 0$, el punto es elíptico; si, además, $\frac{e^*}{E} = \frac{f^*}{F} = \frac{g^*}{G} \neq 0$, el punto es umbílico, si $e^* = f^* = g^* = 0$, plano;
si $e^* g^* - f^{*2} = 0$, el punto es parabólico, (si $e^* = f^* = g^* = 0$, el punto es plano),
si $e^* g^* - f^{*2} < 0$, el punto es hiperbólico.

Por otra parte, de las ecuaciones de **Weingarten**: $_{(11.a)}$ y $_{(11.b)}$, se deduce directamente:

$\underline{n}_u \times \underline{n}_v = \frac{e g - f^2}{E G - F^2} (\underline{r}_u \times \underline{r}_v) = k_T (\underline{r}_u \times \underline{r}_v)$, y de aquí la relación: $|\underline{n}_u \times \underline{n}_v| \, |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| = |e g - f^2|$,

así que en los puntos elípticos y umbilicales, los vectores $\underline{n}_u \times \underline{n}_v \neq 0$ y $\underline{r}_u \times \underline{r}_v$ tienen el mismo sentido y sentidos contrarios en los puntos hiperbólicos. Los puntos parabólicos quedan caracterizados por que en ellos el vector $\underline{n}_u \times \underline{n}_v$ se anula, y esto ocurre en tres casos: o bien $\underline{n}_u = 0$, o bien $\underline{n}_v = 0$, o bien $\underline{n}_u \equiv \underline{n}_v \neq 0$. Teniendo en cuenta las $_{(11.a)}$ y $_{(11.b)}$, estos casos implican respectivamente:

$\underline{n}_u = 0 \Leftrightarrow e = 0, f = 0$, ó bien $e^* = 0, f^* = 0$;
$\underline{n}_v = 0 \Leftrightarrow g = 0, f = 0$, ó bien $g^* = 0, f^* = 0$;
$\underline{n}_u = 0, \underline{n}_v = 0 \Leftrightarrow e = f = g = 0$, ó bien $e^* = f^* = g^* = 0$;
$\underline{n}_u \equiv \underline{n}_v \neq 0 \Leftrightarrow \frac{e^*}{f^*} = \frac{f^*}{g^*}, e^* \neq 0, f^* \neq 0, g^* \neq 0 \Leftrightarrow e^* g^* - f^{*2} = 0, e^* \neq 0, f^* \neq 0, g^* \neq 0$.

Según lo visto, la anulación eventual de algunos de los coeficientes **e, f, g**, o de $e g - f^2$, permite conocer de forma inmediata diferentes características de los puntos y, si hablamos de sus funciones genéricas, diferentes características o tipos de superficie. Si añadimos la posibilidad de que $F = 0$, podemos, resumiendo, particularizar algunos de los casos más evidentes, sin que pretendamos agotar todas las situaciones. Estos casos se representan gráficamente de forma esquemática en la figura 37:

(1)	$F = 0$	las tangentes a las líneas coordenadas $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$ son perpendiculares, (si $F(u, v) = 0$ las familias de curvas coordenadas son ortogonales).
(2)	$F \neq 0, e = 0, f \neq 0, g \neq 0$	existen siempre dos direcciones asintóticas: $\underline{r}_u$ y $\{g, -2f\}$,
(3)	$F \neq 0, e \neq 0, f = 0, g \neq 0$	si es $e g < 0$ existen dos direcciones asintóticas $\{1, \sqrt{-e/g}\}$ y $\{1, -\sqrt{-e/g}\}$, (si es $f(u, v) = 0$, las curvas coordenadas son conjugadas).
(4)	$F \neq 0, e \neq 0, f \neq 0, g = 0$	existen siempre dos direcciones asintóticas: $\underline{r}_v$ y $\{-2f, e\}$.
(5)	$F = 0, e = 0, f \neq 0, g \neq 0$	intersección de los casos (1) y (2)
(6)	$F = 0, e \neq 0, f = 0, g \neq 0$	las direcciones principales coinciden con las tangentes a las curvas coordenadas $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$, si es $eg < 0$ existen las dos asintóticas (3), las curvaturas principales son: $k_1 = e / E$ y $k_2 = g / G$, (si es $f(u, v) = 0$ y $F(u, v) = 0$, las líneas coordenadas coinciden con las líneas de curvatura –conjugadas y perpendiculares–).
(7)	$F = 0, e \neq 0, f \neq 0, g = 0$	intersección de los casos (1) y (4).
(8)	$F \neq 0, e = 0, f = 0, g \neq 0$	solamente existe una dirección asintótica que es, además, una dirección principal y ambas coinciden con $\underline{r}_u$, la otra dirección principal es $\{F, -E\}$, las curvaturas principales son: $k_1 = 0$ y $k_2 = g\, E / E G - F^2$, (si $e(u, v) = f(u, v) = 0$, todos los puntos de la superficie son parabólicos y la superficie es desarrollable, las generatrices tienen la dirección de $\underline{r}_u$).
(9)	$F \neq 0, e \neq 0, f = 0, g = 0$	solamente existe una dirección asintótica que es, además, una dirección principal y ambas coinciden con $\underline{r}_v$, la otra dirección principal es $\{G, -F\}$, las curvaturas principales son: $k_1 = 0$ y $k_2 = e\, G / E G - F^2$, (si $g(u, v) = f(u, v) = 0$, todos los puntos de la superficie son parabólicos y la superficie es desarrollable, las generatrices tienen la dirección de $\underline{r}_v$).
(10)	$F \neq 0, e = 0, f \neq 0, g = 0$	existen dos direcciones asintóticas $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$, las direcciones principales son: $\{\sqrt{G}, \sqrt{E}\}$ y $\{\sqrt{G}, -\sqrt{E}\}$, las curvaturas principales: $k_1 = f / \sqrt{EG} + F$ y $k_2 = -f / \sqrt{EG} - F$, (si $e(u,v) = g(u,v) = 0$, las líneas asintóticas coinciden con las coordenadas).
(11)	$F = 0, e = 0, f = 0, g \neq 0$	intersección de los casos (1) y (8), las curvaturas principales serán: $k_1 = 0$ y $k_2 = g / G$, (si $e(u, v) = f(u, v) = F(u, v) = 0$, la superficie es desarrollable estando referida a las líneas de curvatura principal).

(12) $F = 0,\ e \neq 0,\ f = 0,\ g = 0$ — intersección de los casos (1) y (9), las curvaturas principales serán: $k_1 = 0$ y $k_2 = e/E$, (si $g(u, v) = f(u, v) = F(u, v) = 0$, la superficie es desarrollable estando referida a las líneas de curvatura principal).

(13) $F = 0,\ e = 0,\ f \neq 0,\ g = 0$ — intersección de los casos (1) y (10), existen dos direcciones asintóticas $\underline{r}_u$ y $\underline{r}_v$ que además son ortogonales, las direcciones principales son: $\{\sqrt{G}, \sqrt{E}\}$ y $\{\sqrt{G}, -\sqrt{E}\}$, las curvaturas principales son $k_{1,2} = \pm f / \sqrt{EG}$, (si $e(u, v) = g(u, v) = F(u, v) = 0$, la superficie es mínima, estando además, referida a sus líneas asintóticas).

(14) $e = 0,\ f = 0,\ g = 0$ — el punto es plano, todas las direcciones son principales y asintóticas.

Finalmente podemos, entre otros, elegir tres casos significativos más, que vinculan la proporcionalidad entre coeficientes de la **I** y la **II**, y que se incluyen también en la figura 37:

(15) $e/E = f/F \neq 0$ — una dirección principal es la $\underline{r}_u$ y la otra $\{g F - f G,\ eG - g E\}$, las curvaturas principales son: $k_1 = e/E = f/F$ y $k_2 = E g - F f / E G - F^2$.

(16) $g/G = f/F \neq 0$ — una dirección principal es la $\underline{r}_v$ y la otra $\{e G - g E,\ f E - eF\}$, las curvaturas principales son: $k_1 = g/G = f/F$ y $k_2 = e G - F f / EG - F^2$.

(17) $e/E = f/F = g/G \neq 0$ — el punto es umbílico, todas las direcciones son principales, todas las curvaturas son iguales a $e/E = f/F = g/G$.

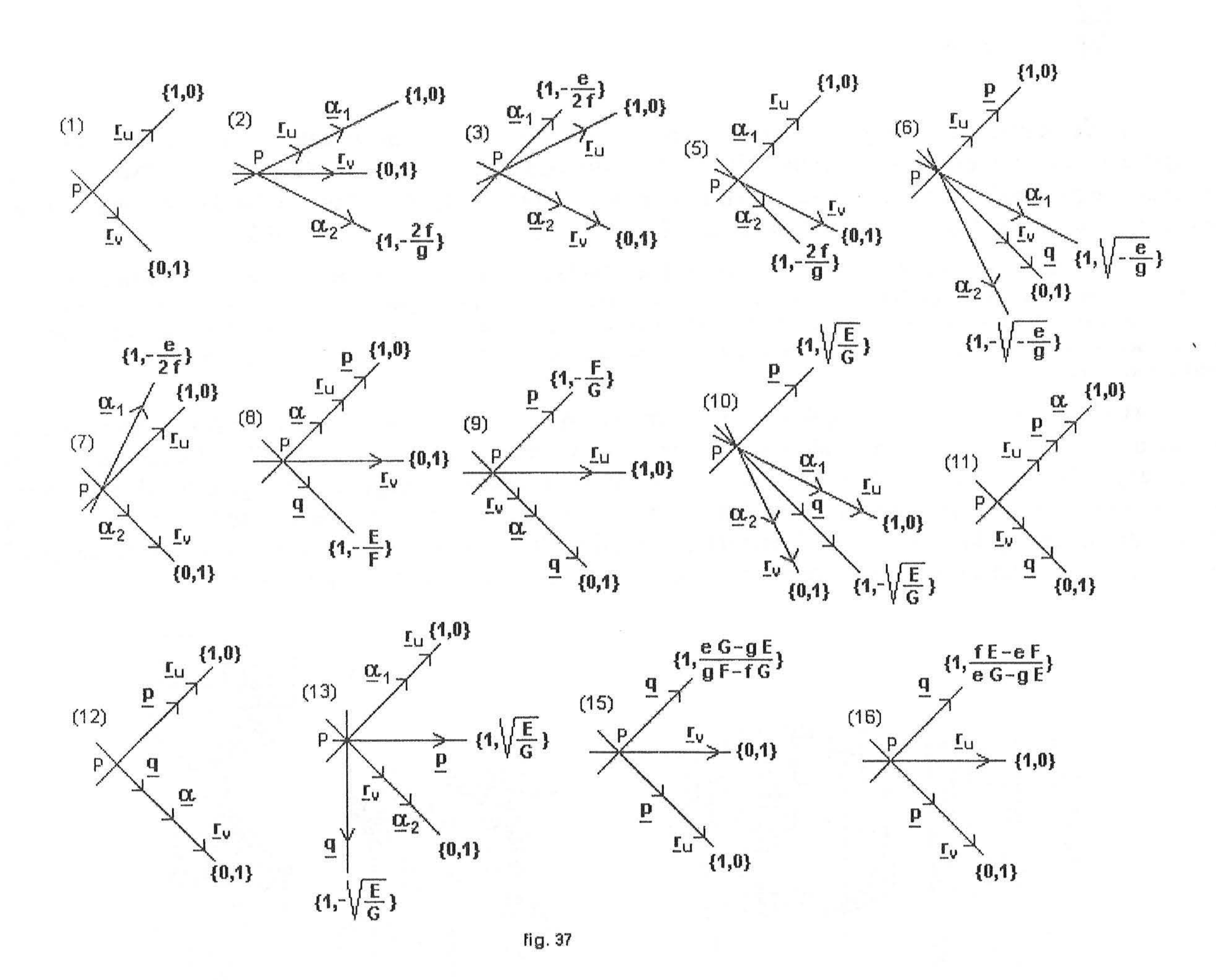


fig. 37

§ 16.-Algunas cuestiones acerca de las superficies de curvatura total constante. Superficies de curvatura nula: superficies desarrollables.

Denominamos "superficies de curvatura total constante" o simplemente "superficies de curvatura constante" a aquellas superficies tales que en todos sus puntos el valor de la curvatura total o "de Gauss" $\mathbf{k_T}$ permanece fijo e invariable. Verifican por lo tanto:

$$\mathbf{k_T = k_1\, k_2 = cte \quad \Leftrightarrow \quad e(u, v)\, g(u, v) - f^2(u, v) = cte \quad \Leftrightarrow \quad e^*(u, v)\, g^*(u, v) - f^{*2}(u, v) = cte.}$$

Consideraremos, por el momento, que dicha cantidad es un valor no nulo.

Un ejemplo notorio y trivial de este tipo de superficies lo constituye la esfera, que resulta ser la única superficie regular, sin bordes o contornos, de curvatura constante con valor positivo. Un ejemplo menos trivial pero también muy conocido es la denominada comúnmente "pseudoesfera"o superficie de **Beltrami** (estudiada también por **Minding**), superficie de curvatura constante negativa que puede generarse por rotación alrededor de un eje vertical de la curva denominada "tractriz" (figura 38); tal superficie presenta una circunferencia de puntos singulares correspondientes a la rotación del punto de retroceso de la curva directriz.

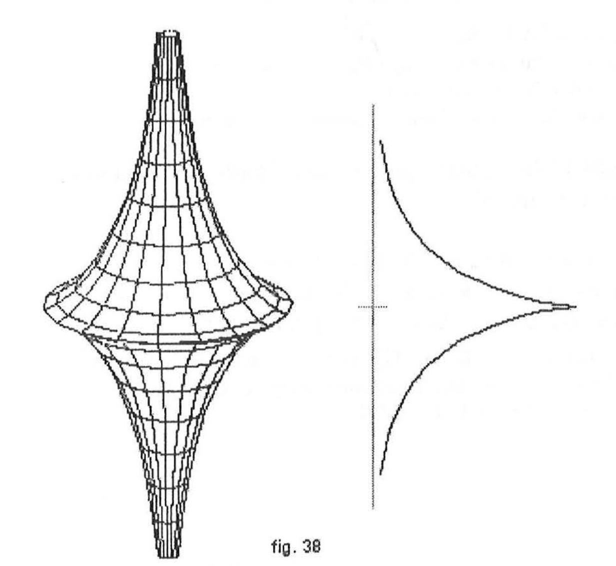


fig. 38

Desde un punto de vista general, más que en sí mismas, el interés predominante de estas superficies es el de las aplicaciones o representaciones entre todas ellas (**Minding**), consecuencia, finalmente, de un "sorprendente" teorema –"egregium"– que **Gauss** enunció en el primer tercio del siglo XIX. Para hablar de estas aplicaciones, tendremos que acercarnos al contexto de las isometrías, a las que ya nos referimos en el § 3.

La referencias anteriores se refieren a **E. Ferdinand A. Minding** (1806-1885) y al llamado teorema de **Minding**: "Todas las superficies de igual curvatura– de **Gauss**– constante, son – localmente – isométricas" expuesto en 1839. Matemático de origen polaco, estudió y trabajó entre otras ciudades en Berlín y Dorpat. Muy reconocido por su trabajo sobre las superficies de curvatura constante y las representaciones isométricas entre superficies que se puede encontrar expuesto en las "Leçons sur la théorie général des surfaces..." de **Darboux** ya citadas.

Básicamente, se denomina aplicación isométrica entre dos superficies a la correspondencia biunívoca que conserva idéntica la longitud de cualquier arco de curva regular trazado en una de ellas. Es conveniente, no obstante, precisar que este tipo de aplicaciones deben ser contempladas siempre entre fragmentos de superficie y no entre superficies "en su totalidad". Esta última precisión nos evita caracterizar algunas de las propiedades de la propia aplicación y la consiguiente literatura matemática derivada, que en algunas ocasiones quizás pueda confundir más que aclarar el hecho esencial en sí de la conservación de la métrica entre ambas.

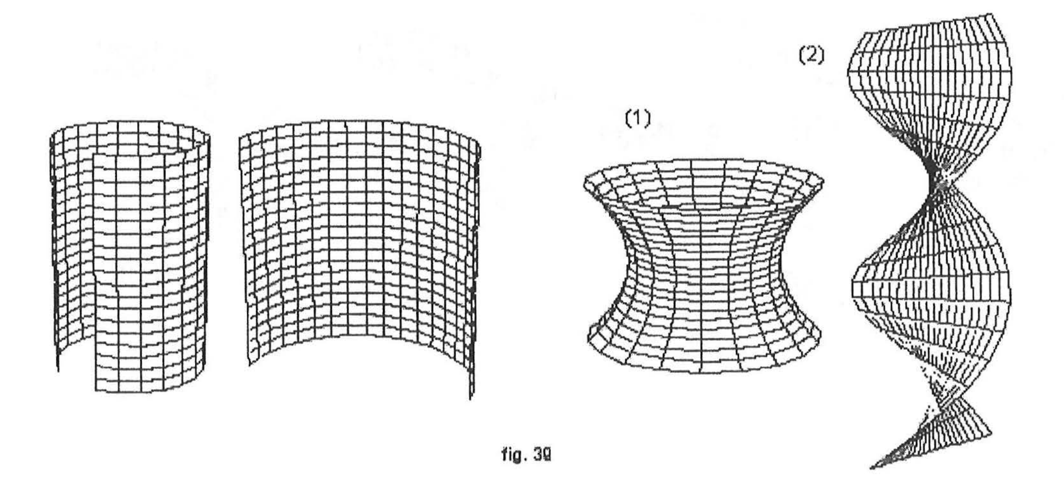


fig. 39

No resulta difícil imaginar que tal propiedad se puede verificar entre los fragmentos de cilindros de la figura 39, pero no resulta tan evidente entre fragmentos del catenoide [1] y del helicoide recto[2] de la misma figura –superficies de las que se volverá a hablar en **§ 17**–. La relación entre estas dos últimas superficies resulta ser un ejemplo histórico, y también paradigmático, de superficies que pueden representarse isométricamente. En los dos casos citados, además, tales aplicaciones pueden ser vistas como transformaciones continuas de una superficie en la otra, de forma que todas las superficies entre la original y la final sean también isométricas entre sí. En estas condiciones, a esta transformación continua es a lo que denominamos "flexión" de superficies –en sentido matemático– y que constituye un proceso mucho más exigente que la mera correspondencia entre dos superficies, porque aquí queda involucrada toda una familia de superficies entre la inicial y la final. La figura 40a, ilustra esquemáticamente este proceso de deformación entre el catenoide y el helicoide recto.

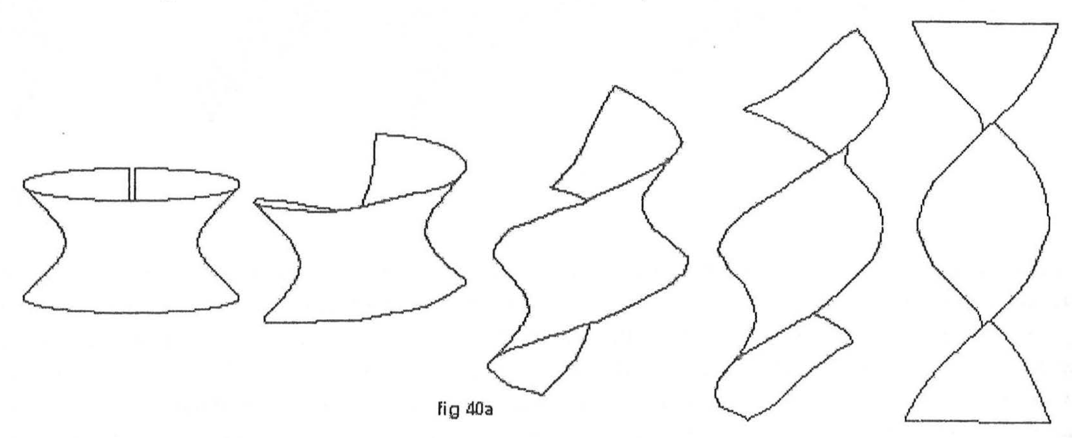


fig 40a

En la flexión de superficies, en resumen, este proceso de "deformación" puede verificarse a veces de forma continua sin alterar en ningún momento sus propiedades métricas. Obsérvese, sin embargo, que en el caso de los fragmentos de cilindros este proceso puede obtenerse por flexión simple en el sentido "elástico", en la que las líneas de curvatura principal, ortogonales a las generatrices, son planas y se conservan planas a lo largo de la flexión, variando solamente su primera curvatura (figura 41), lo que representa un proceso todavía más exigente, en tanto en la transformación de un catenoide en un helicoide recto, el proceso involucra claramente variaciones de torsión de las líneas de curvatura principal: los paralelos de torsión nula, por ejemplo, se convierten en hélices de torsión constante distinta de cero.

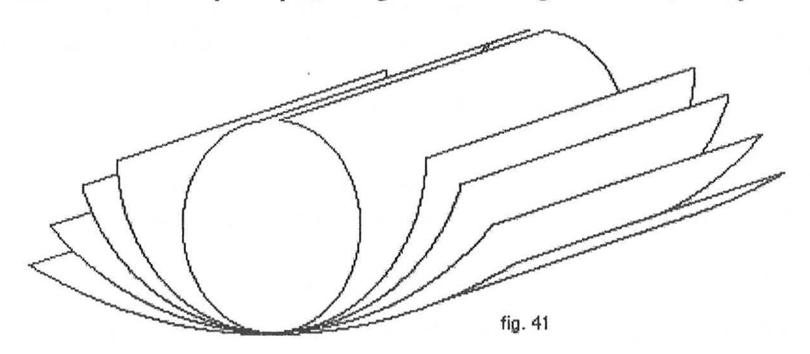


fig. 41

Estos procesos de isometría entre superficies pueden ser descritos de manera analítica entre las superficies parametrizadas a través de los coeficientes **E, F, G** de la primera forma cuadrática fundamental, que son los que gobiernan las relaciones de medida resultando, congruentemente, que entre dos superficies parametrizadas isométricas los coeficientes **E**, **F**, **G**, deben ser idénticos en puntos homólogos. Cuando consideramos una familia de superficies parametrizadas dependientes de un parámetro arbitrario **t**: $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$, tales que los escalares **E**, **F**, **G**, tengan los mismos valores para cualquier valor del parámetro **t**, estamos considerando un proceso de flexión entre cualesquiera dos superficies de la familia. Es así como mejor podemos mostrar, por ejemplo, que entre el catenoide y el helicoide recto puede definirse una flexión. El conjunto de helicoides todos isométricos entre sí, puede describirse mediante:

$$\underline{\mathbf{r}}\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) = \{\mathbf{cos\,t\ ch\,u\ cos\,v + sen\,t\ sh\,u\ sen\,v,\ cos\,t\ ch\,u\ sen\,v - sen\,t\ sh\,u\ cos\,v,\ cos\,t\ \ u + sen\,t\ \ v}\}$$

que incluyen el catenoide para $\mathbf{t = 0}$ y el helicoide recto para $\mathbf{t = \pi/2}$ (figura 40b).

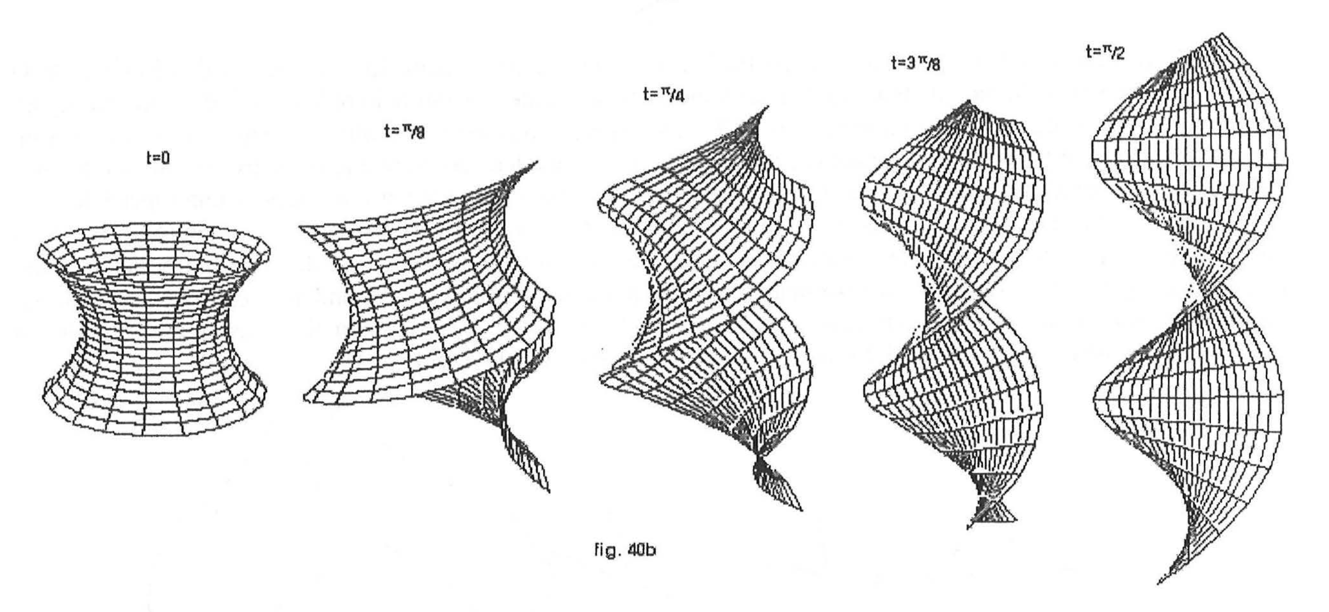


fig. 40b

El resultado sorprendente de **Gauss** al que antes nos hemos referido, muestra que la curvatura total $\mathbf{k_T}$, un índice formal de la superficie y que, por lo tanto, parecería estar ligado inevitablemente a los coeficientes **e**, **f**, **g** , depende, sin embargo, solamente de las funciones **E**, **F**, **G** – y de sus derivadas –, asi que se convierte en un invariante en los procesos de flexión entre las superficies. De aquí se deduce que todas las superficies de curvatura constante son isométricas y que, por ejemplo, todas las superficies de curvatura constante positiva pueden hacerse corresponder isométricamente con una esfera – teniendo en cuenta que, en general, estamos hablando de fragmentos – o bien, si se quiere, que todas las superficies de curvatura constante negativa son isométricas con la "pseudoesfera".

Parece claro que si se considera una superficie como una película flexible pero inextensible y se admite la posibilidad de deformar esta superficie sin desgarros ni extensiones o contracciones, la longitud de toda curva trazada sobre la superficie permanecerá invariable en la deformación, así que, finalmente, toda deformación arbitraria de un fragmento de superficie que no suponga dilatación, contracción o desgarradura, se puede denominar flexión de la superficie. En este proceso las cantidades **E**, **F**, **G** permanecen constantes, y por lo tanto permanecerán invariables las distancias, longitudes, ángulos y áreas de las distintas regiones, constituyendo por tanto una transformación continua isométrica.

Denominaremos ahora "superficies de curvatura total nula", o simplemente "superficies de curvatura nula", a aquellas superficies – de curvatura constante – tales que en todos sus puntos el valor de la curvatura total es nulo. Satisfacen por lo tanto:

$$\mathbf{k_T = k_1\, k_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e(u, v)\, g(u, v) - f^2(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^*(u, v)\, g^*(u, v) - f^{*2}(u, v) = 0.}$$

La única superficie cuyas dos curvaturas principales son sistemáticamente nulas en todos sus puntos es el plano, por lo que, en general, nos referiremos a aquellas superficies en las que solamente una de las dos curvaturas principales es nula en todos sus puntos, en tanto el valor de la otra es distinto de cero – o eventualmente cero en algunos puntos aislados –. Los puntos de una superficie de curvatura nula –exceptuando el plano – deberán ser, por lo tanto, parabólicos y, excepcionalmente, planos.

Como se ha dicho, las superficies de curvatura nula resultan ser un caso particular de las superficies de curvatura constante y gozan, por ello, de todas las propiedades de éstas, particularmente en lo que respecta a las correspondencias entre ellas. Sin embargo, en este conjunto hay superficies que tienen una destacada personalidad propia, que las distinguen inequívocamente y que se encuentran notoriamente presentes en muchos y muy variados campos vinculados a la geometría. En efecto, entre las superficies $\mathbf{k_T(u, v) = 0}$ encontramos algunos tipos de superficies muy sencillas y frecuentes capaces, además, de ser analizadas por procedimientos muy elementales, tales como los cilindros y los conos o – en lugar diferente – las denominadas superficies "tangenciales".

La peculiaridad básica privativa de las superficies de curvatura nula, es que son envolventes de un haz de planos, no paralelos ni con una recta común, de donde se deriva también su nombre de "superficies desarrollables", que se refiere a su desarrollo o rectificación en un plano. La demostración clásica de esta importante propiedad pasa por comprobar que cualquier superficie parametrizada regular $\underline{\mathbf{r}}\ \mathbf{(u, v)}$, tal que el vector $\underline{\mathbf{n}}\ \mathbf{(u, v)}$ en cada uno de sus puntos depende únicamente de uno de sus dos parámetros "**u**" ó "**v**", resulta ser, inevitablemente, la

envolvente de una familia uniparamétrica de planos en las condiciones citadas. Como ya se dijo en **§ 15**, teniendo en cuenta las ecuaciones de **Weingarten** (11.a) y (11.b), la condición $\mathbf{e\,g - f^2 = 0}$ equivale a la $\underline{\mathbf{n}}_u \times \underline{\mathbf{n}}_v = \mathbf{0}$, y esta última condición se verifica, trivialmente, si uno de los dos vectores $\underline{\mathbf{n}}_u$ ó $\underline{\mathbf{n}}_v$ es nulo, resultando en este caso que la normal $\underline{\mathbf{n}}(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ depende de un solo parámetro. En el caso en que, no siendo nulos, ambos vectores sean equivalentes, bastará garantizar que existe una parametrización de la superficie tal que verifica el caso anterior – de anulación de uno de ellos –; esto es lo que ocurre si se toma la familia – única – de líneas asintóticas de la superficie, que resultan ser rectas, como una de las congruencias de curvas coordenadas. Esta última parametrización constituye, por otra parte, la representación "reglada" de la superficie desarrollable.

Si consideramos una familia de planos con una dirección común, obtendremos como envolvente un cilindro; si tienen un punto común, obtendremos un cono y si consideramos simplemente la familia de planos osculadores de una curva alabeada cualquiera, obtendremos como envolvente una superficie de desarrollo tangencial. Todas estas superficies pueden extenderse, finalmente, en un plano y, según lo dicho anteriormente, este proceso se puede verificar por flexión.

Cualquier hoja plana de papel curvada arbitrariamente sin extensiones, contracciones o desgarraduras constituye, por lo tanto, un fragmento de superficie desarrollable. En este proceso, cualquier arco de curva trazado originalmente en la hoja plana conserva su primera curvatura y varía su torsión y, trivialmente, conserva su longitud. Esta identificación entre un sector de cilindro, o de cono, con un plano se percibe fácilmente, en tanto en el caso de una superficie tangencial requiere, en general, de un mayor esfuerzo. En este caso puede ayudar el imaginar recortado previamente el fragmento de plano a lo largo de una curva regular trazada sobre el mismo, en la que estén representadas sus tangentes; al deformar esta hoja convirtiendo la curva en alabeada, conserva su primera curvatura invariable y también se conservan sus tangentes, variando únicamente su torsión, obteniéndose una hoja de superficie tangencial.

En el campo de la ingeniería se han recogido todas estas cuestiones de forma muy natural. El que solamente las superficies desarrollables puedan convertirse en un plano por flexión, por ejemplo, es lo que se conoce por "deformabilidad" en este sentido. El resultado es que, exceptuando las desarrollables – de curvatura "simple" –, todas las demás superficies – de doble "curvatura" –, incluyendo naturalmente las regladas alabeadas, son "indeformables" (por flexión).

§ 17.-Notas sobre las superficies de curvatura media nula: superficies mínimas.

Las superficies tales que en todos sus puntos las líneas asintóticas son ortogonales se han denominado en §11 "superficies mínimas". Esta propiedad equivale, como se dijo, a que la curvatura media $\mathbf{k_m}$ se anule en todos sus puntos, así que estas superficies pueden ser también definidas como "superficies de curvatura media nula". Trivialmente, el que $\mathbf{k_m = \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2) = 0}$ indica que ambas curvaturas principales deben ser necesariamente iguales y de signos contrarios, lo que excluye los puntos elípticos y parabólicos. En las superficies mínimas –exceptuando el plano – todos los puntos son minimales y deben de ser hiperbólicos. Según lo dicho en el **§ 11**, la $\mathbf{eG - 2f\,F + gE = 0}$ puede considerarse la ecuación diferencial de estas superficies.

Estas superficies han sido muy estudiadas y en ellas se han centrado, en las últimas décadas, muchos investigadores desde diferentes ámbitos. Todos los grandes impulsores de la Geometría Diferencial se han interesado por ellas: **Euler**, **Lagrange**, **Monge**, **Meusnier**, **Dupin**,...y muchos más después, hasta el final del siglo XX: físicos, matemáticos o ingenieros, con intervención de investigadores de otras ramas o materias científicas tales como puede ser la Cristalografía o la Química. La razón de esta amplia gama de intereses seguramente radica en que las superficies de área mínima delimitadas por un contorno cerrado alabeado resultan ser superficies de curvatura media nula y de ahí el nombre de "superficies mínimas", por lo que, desde un punto de vista matemático, estas superficies se encuentran involucradas en el cálculo de variaciones y en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales así como en la teoría de funciones de variable compleja, aunque su generación constructiva nos traslade, inevitablemente, al campo de los experimentos físicos.

Se puede atribuir a **Meusnier** el descubrimiento de las dos superficies mínimas "clásicas", al margen del plano, que son el catenoide – una superficie de revolución – y el helicoide recto – una superficie reglada alabeada – de las que ya se ha hablado. Sin embargo, para **Euler** el catenoide ya había sido, antes objeto de atención como una superficie mínima. Después, hubo que esperar más de cincuenta años para conocer (de forma explícita) el hallazgo de otras superficies: la de **H. F. Scherk** – una superficie de traslación – fue celebrada como un acontecimiento. Posteriormente se conocieron las superficies de **Enneper**, **Henneberg**, **Schwarz**, **Riemann** y otros, dentro del siglo XIX, y más tarde, en otra generación distinta, se han conocido las superficies mínimas del último tercio del siglo XX: **Schoen**, **Chen**, **Costa**, **Karcher**...

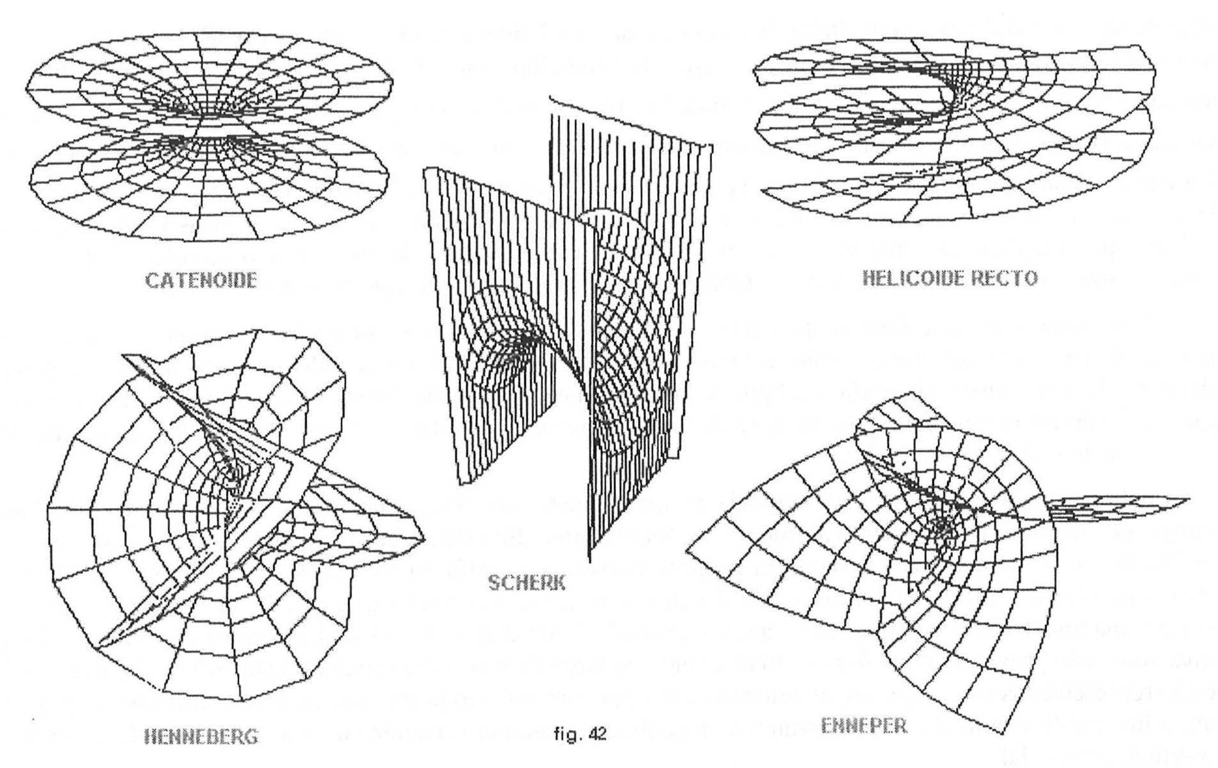


fig. 42

El inicio de la teoría de superficies mínimas podemos situarlo en el Cálculo de Variaciones de **Lagrange** cuyos fundamentos se encuentran en el tomo II de "Miscellanea Taurinensia" (1760-1761), donde, generalizando resultados de **Euler**, encuentra que las superficies de área mínima limitadas por un contorno dado satisfacen una ecuación en derivadas parciales. **Monge** se ocupa por primera vez de la superficies mínimas y de la integración de la ecuación de **Lagrange** en su "Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles" (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de 1784). Sus métodos son cuestionados por **Laplace** y corregidos por **Legendre** en 1787. La ecuación en derivadas parciales de **Lagrange** es estudiada por **Meusnier** en su "Mémoire sur la courbure des surfaces" de 1776, aportando un nuevo punto de vista puramente geométrico al considerar que en cada punto de una superficie mínima la suma de los radios de curvatura principal debe de ser nula. Utilizando la ecuación de **Monge** para las superficies engendradas por una recta paralela a un plano, la integración de las ecuaciones de **Lagrange** conduce a **Meusnier** al helicoide recto y, así mismo, en el caso de superficies de revolución mínimas le conduce al catenoide. Aparte de algunas superficies imaginarias y otras aportaciones de **Poisson**, entre 1776 y 1830, no se conocieron más que las superficies de **Meusnier**. En 1834 aparece un trabajo de **Scherk** en el que partiendo de la integral de **Monge** y de **Legendre**, con la vía abierta por **Meusnier**, obtiene la ecuación que rige todos los helicoides que son superficies minimales – todas isométricas ("aplicables") entre sí – que comprenden a la vez el catenoide y el helicoide recto. El principal merito de este trabajo es que incluye el empleo de fórmulas nuevas de superficies complicadas pero reales. **Darboux** atribuye a **Catalan** en 1842 el haber probado que la única superficie mínima real engendrada por una recta es el helicoide recto. **Serret** en 1846, **Bonnet** en 1853-56, **Enneper** en 1864, **Beltrami** en 1865-68, **Dini** en 1865, contribuyen, entre otros, a las búsqueda de soluciones hasta llegar a los trabajos de **Weierstrass**, **Schwarz** y **Henneberg**. Las aportaciones de **Weierstrass** publicadas en 1866 se remontan a los trabajos de **Monge** pero, con un lenguaje enteramente distinto, propone las fórmulas para encontrar superficies mínimas reales y algebraicas que establecen de manera clara y precisa la relación que existe entre las funciones de variable compleja y las superficies mínimas. Finalmente los estudios de **Riemann** y **M. Schwarz** sobre el problema de **Plateau** pueden completar básicamente la historia clásica del estudio de estas superficies.

Se han representado en la figura 42 fragmentos del catenoide y del helicoide recto sobre las representaciones: $\{\mathrm{ch}\ v \cos u, \mathrm{ch}\ v \,\mathrm{sen}\ u, v\}$, con $u\in[-\pi,\pi]$, $v\in[-\pi,\pi]$ y $\{\mathrm{sh}\ v \cos u, \mathrm{sh}\ v \,\mathrm{sen}\ u, u\}$, con $u\in[-\pi,\pi]$, $v\in[-\pi,\pi]$, respectivamente, y algunas variantes de la primera generación de superficies mínimas citadas con las representaciones y límites siguientes:

Scherk: $\{u, v, L\frac{\cos v}{\cos u}\}$, con $u\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, **Enneper**: $\{u-\frac{u^3}{3}+u v^2, v-\frac{v^3}{3}+v u^2, u^2-v^2\}$, con $u\in[-2,2]$, $v\in[-2,2]$, **Henneberg**: $\{\cos u\ \mathrm{sh}\ v-\frac{1}{3}\cos 3u\ \mathrm{sh}\ 3v, \mathrm{sen}\ u\ \mathrm{sh}\ v+\frac{1}{3}\mathrm{sen}\ 3u\ \mathrm{sh}\ 3v, \cos 2u\ \mathrm{ch}\ 2v\}$, con $u\in[0,\pi]$, $v\in[-1,1]$.

Es de notar que estas dos últimas, sobre todo, presentan muy distintos aspectos según el punto de vista y los limites de la región que se consideren. En la figura 42 se ha tratado de mostrar fragmentos descriptivos desde los puntos de vista más usuales pero para facilitar un poco la interpretación de su estructura, se ha representado en la figura 43, desde un mismo punto de vista, el "crecimiento" de la superficie de **Enneper** (ambos parámetros) y en la figura 44 la de **Henneberg** (variando el parámetro "v"), mostrando en ambos casos diversas regiones de la misma. De estas superficies pueden destacarse, entre otras muchas cosas, el carácter periódico alterno de la de **Scherk** (figura 45), o que la superficie de **Henneberg** – en su totalidad – es una superficie de una sola cara como la banda de **Moebius**.

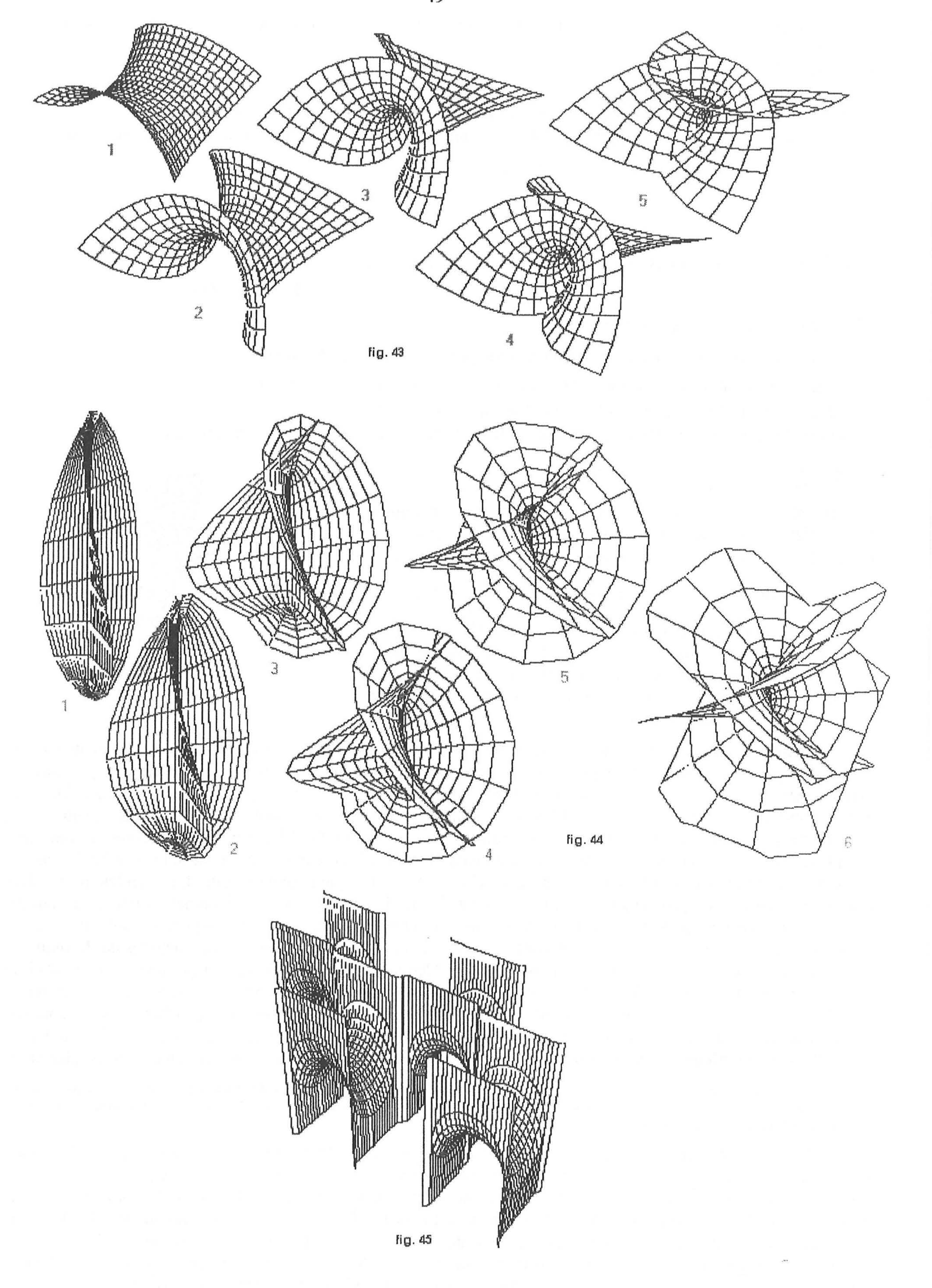


fig. 43

fig. 44

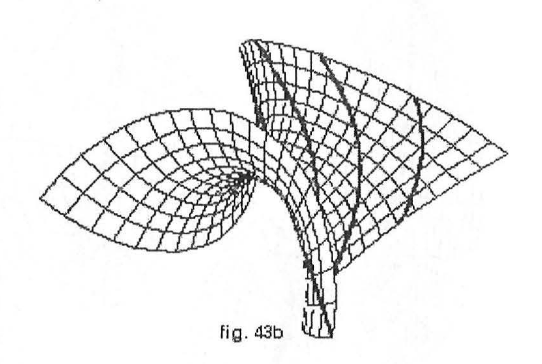
fig. 45

Operaciones no muy onerosas nos permiten obtener con la parametrización de **Scherk**, por ejemplo, los resultados:
$E=1+tg^2u,\ F=tg\,u\ tg\,v,\ G=1+tg^2 v,$
$e^*=sec^2 u=1+tg^2u,\ f^*=0,\ g^*=-sec^2 v=-(1+tg^2 v),$
así que $e^*=E$ y $g^*=-G$, por lo que $e^* G-2f^*F+g^*E=e^*G+g^*E=EG-GE=0$,
y la curvatura media resulta ser nula en todos los puntos. La superficie está referida a líneas conjugadas y las curvaturas principales pueden expresarse por $k_{1,2}(u,v)=\pm\dfrac{sec\,u\ sec\,v}{(1+tg^2u+tg^2v)^{\frac{3}{4}}}$.

En cada punto sus direcciones principales podrán obtenerse de la ecuación $\begin{vmatrix}\lambda^2 & -\lambda & 1\\ E & 0 & -G\\ E & F & G\end{vmatrix}=0,$

y las asintóticas de: $-G\alpha^2+E=0$.

Así mismo sobre la parametrización de **Enneper** obtenemos con facilidad:
$E=(1+u^2+v^2)^2,\ F=0,\ G=(1+u^2+v^2)^2=E;\ EG-F^2=EG=E^2\Rightarrow\sqrt{EG-F^2}=E$
$e^*=2(1+u^2+v^2)^2,\ f^*=0,\ g^*=-2(1+u^2+v^2)^2$, así que $e=-g=2$.
La superficie está referida a sus líneas de curvatura principal por lo que las curvaturas principales serán:
$k_1=\dfrac{e}{E}=\dfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2},\ k_2=\dfrac{g}{G}=-\dfrac{e}{E}-\dfrac{2}{(1+u^2+v^2)^2},$
y podemos, de forma elemental, obtener, por ejemplo, parametrizaciones de sus líneas asintóticas ya que la ecuación:
$g^*\alpha^2+2f^*\alpha+e^*=0$ se convierte en $-2\alpha+2=0\Rightarrow\alpha=\pm1$.
La integración de las ecuaciones diferenciales $\dfrac{dv}{du}=\pm1$, nos permite obtener las curvas $v=u+C$ y $v=-u+C$. En la figura 43b se representan algunas líneas indicativas de una de estas familias que cortan a las líneas coordenadas bajo ángulos de 45°. Las lineas coordenadas son, además, isotermas ($E=G$), y dividen a la superficie en cuadrados curvilíneos.


fig. 43b

El impulsor de toda la teoría de estas superficies fue, sin embargo, el físico **Plateau**, experimentando con películas líquidas a mediados del siglo XIX. Pasa que, debido a la tensión superficial, estas películas solamente permanecen en equilibrio estable cuando su área se minimiza, lo que se corresponde con un menor valor de la energía potencial. Los experimentos de **Plateau** se realizaron con películas jabonosas de baja tensión superficial, delimitadas por bastidores muy diversos construidos con alambre. Es fácil imaginar experimentos de este tipo, aunque técnicamente obtener la emulsión adecuada para determinadas escalas no es demasiado sencillo. El caso es que estos experimentos constituyeron el arranque del enorme interés que el tema suscitó. La dificultad de resolver matemáticamente estos problemas de forma explícita desde el punto de vista variacional, conducía a plantear teoremas de existencia para determinadas condiciones del contorno y algunos otros aspectos cualitativos de las soluciones, así que fueron los hechos materiales físicos, o sea las propias construcciones como las de **Plateau**, las que permitieron adelantar algunos resultados buscados. Detrás de los experimentos surgió una gran cantidad de literatura matemática que justificaba diferentes aspectos y creaba a su vez otras expectativas. Se fueron obteniendo abundancia de diferentes teoremas que justificaban el hecho físico y que a su vez, se expandían en otros teoremas de nuevo tipo. De los orígenes físicos de esta forma de contemplar estas superficies, ha quedado la denominación de "problema de **Plateau**" al de encontrar una superficie de área mínima limitada por cualquier contorno alabeado.

La propuesta básica del físico belga **J. A. F. Plateau** (1801-1883) es la de que existe siempre una superficie mínima cuyo contorno está limitado por una curva simple y cerrada. Este problema, como se ha dicho, fue analizado por **Weierstrass**, **Riemann**, **Schwarz**... y resuelto finalmente por **Douglas** y **Radó**.

Está a nuestro alcance demostrar que el helicoide recto es la única superficie mínima reglada. Más fácil resulta demostrar que es el único conoide recto teniendo en cuenta la propiedad de curvatura y torsión constante de las hélices circulares: se puede partir de que una de las familias asintóticas del conoide la forman las rectas generatrices de la superficie, en tanto sus trayectorias ortogonales deberán constituir la segunda familia de líneas asintóticas, en las que, necesariamente, su plano osculador deberá coincidir con el plano tangente a la superficie. Con cierta comodidad puede también demostrarse que el catenoide es la única superficie mínima de revolución, trabajando con el eje de rotación **OZ** y teniendo en cuenta las propiedades de curvatura de la catenaria.

"Como la catenaria (chaînette) es la única curva en la que el radio de curvatura es igual y de signo contrario a la normal, el catenoide es la única superficie de revolución para la cual los radios de curvatura principales son en cada punto iguales y de signos contrarios" (**Darboux**, Leçons, I, VIII). "Hemos visto que toda superficie mínima está caracterizada por esta propiedad de tener en cada punto sus tangentes asintóticas rectangulares. Si la superficie es reglada, una primera familia de líneas asintóticas está formada por las generatrices rectilíneas, la segunda familia serán sus trayectorias ortogonales. Por consiguiente, todas estas trayectorias ortogonales deberán admitir a las generatrices como normales principales. Serán pues hélices trazadas sobre un cilindro circular recto y la superficie mínima será el helicoide de plano director" (**Darboux**, Leçons, III, I, nota al pie).

Como se ve, estas superficies son accesibles si se dispone de algunos conocimientos de geometría diferencial, pero a partir de aquí, las cosas se han complicado, por lo que el análisis de tales superficies va requiriendo una progresiva especialización.

Los propios experimentos de **Plateau**, realizados con técnicas modernas, proporcionan objetos geométricos de gran interés como fuente de formas curvadas. Desde este punto de vista son representativas, por ejemplo, las obtenidas con estructuras de contornos poliédricos. El proceso tampoco resulta demasiado sencillo porque, dependiendo del contorno, el resultado puede ser una multiplicidad de hojas – incluso de un aglomerado confuso – y no una única superficie. Los experimentos con varios contornos asociados han dado lugar a la multiplicación de nuevos géneros topológicos de superficies cada vez más complicadas. Finalmente, las modificaciones continuas de un solo contorno han permitido estudiar transiciones entre diferentes superficies estables y, en particular, relaciones totalmente inesperadas entre superficies.

Fuera ya del ámbito disciplinar y rígido de las matemáticas, las variantes clásicas y las "modernas" de estas superficies – entre las distintas generaciones de superficies "limpias" encontradas –, constituyen, como se ha dicho, una manantial generador de formas espaciales muy sugerentes desde el punto de vista constructivo. Al ser la suma de las curvaturas, en cualesquiera dos direcciones ortogonales, un valor constante, y al ser las dos curvaturas principales iguales en valor absoluto, la "manera" de curvarse estas superficies en el espacio se observa, de una forma muy natural, desde cualquier posición y desde cualquier ángulo, en nuestra percepción "ortogonal", con una sorprendente "regularidad" lo que seguramente es parte importante del atractivo visual y el interés estético de estos objetos geométricos.

§ 18.-Algunas notas sobre el uso arquitectónico de las superficies como elementos de cubrición.

Los distintos tipos de superficies han sido objeto de mayor interés para su utilización como elementos arquitectónicos estructurales, constructivos o simplemente ornamentales en la medida en que han sido mejor estudiados con métodos de análisis más avanzados y cálculos más elaborados y, en fin, en la medida que han sido mejor conocidos.

Dentro de la edificación, muy significativos son los elementos continuos de cubrición, en general de amplios espacios. Dejaremos a un lado los modelos rígidos de superficies elementales desarrollables o las superficies de revolución clásicas – o no tan clásicas – que han sido utilizadas, con distintos niveles constructivos o de función estructural, desde tiempos inmemoriales. Son estructuras "gruesas" solicitadas predominantemente por esfuerzos de compresión, incapaces o poco capaces de adaptarse a distintos estados de carga y que incluso pueden alcanzar su equilibrio a través de fisuras o fragmentaciones que, no obstante, no la inutilizan para su función. Requieren, además, rigidez suficiente para absorber las flexiones o efectos de pandeo.

A lo largo del segundo tercio del siglo XX aparecen, sin embargo, las estructuras continuas laminares de pequeño espesor en relación con sus dimensiones, "cáscaras" o "cascarones", que se construyen inicialmente de manera casi excluyente en hormigón armado; **Dischinger**, **Torroja**, **Candela**, **Nervi**, **Tange**, **Saarinen**, son, entre otros, nombres ligados de distintas maneras a este desarrollo. Estas estructuras son capaces de absorber, en amplias regiones de la misma, un rango moderado de solicitaciones mediante tracciones-compresiones, más esfuerzos tangenciales en el plano tangente de la superficie media que la idealiza. Su análisis desde una teoría general de la flexión – más o menos simplificada –, a la que dedicaremos algunas notas posteriormente, proporciona bastantes dificultades por lo que, casi simultáneamente, aparecen los diferentes métodos simplificados, más o menos adaptados a distintos casos, independientemente de los procedimientos empíricos de ensayos sobre maquetas que, reproduciendo a escala los modelos reales, permitan garantizar o, al menos, justificar su uso. Aquí los condicionantes puramente geométricos, es decir, la propia forma de la superficie es fundamental, y los condicionantes y limitaciones más importantes son los contornos y las condiciones de los vínculos de sustentación que hacen más o menos adecuadas las simplificaciones. En principio, una amplia gama de formas es posible, y las superficies utilizadas quedan condicionadas a otros factores económicos, medios técnicos o constructivos, como son, por ejemplo, el cálculo y el diseño de las cimbras que soportan los moldes de colado, o bien la propia construcción de los cofres. Estos condicionantes segregan, por un lado, las superficies regladas de las que no lo son, ya que las generatrices pueden ser substituidas adecuadamente por tablones y entablamentos que facilitan el

replanteo de la cáscara y, por otro lado, separan las alabeadas –de "doble" curvatura – de las desarrollables – de curvatura "simple" – debido a su comportamiento, consecuencia de su deformabilidad conceptual. Se destacan así las cuádricas regladas, con predominio destacado del paraboloide hiperbólico o sus agrupaciones y de distintos conoides. Posteriormente, con el tiempo, el interés de tales estructuras sufre un claro descenso hasta que modernos métodos finitos de cálculo, de aplicación muy general a cualquier tipo de estructura, y otras técnicas desarrolladas de análisis, las han revitalizado en cierta medida, combinadas con otros tipos de sustentación y de agrupamiento más complejos técnicamente.

Podemos sintetizar en el mismo arquitecto, **Tange**, y en dos de sus obras en Tokio, dos ejemplos representativos de diferentes tendencias constructivas –en cierto modo opuestas– que afectan a la cubrición de grandes espacios. En la Catedral de Santa María (1961-1964) sobre una planta en cruz se levantan los muros formados por ocho paraboloides hiperbólicos recubiertos exteriormente de acero inoxidable y en las dos naves del Estadio Olímpico, gestada y construida aproximadamente en los mismos años, la cubierta de las naves forma, en conjunto, una membrana suspendida en uno –la menor– o dos mástiles o soportes –la mayor–, por intermedio de un sistema de cables principales de trazado parabólico y una red de secundarios a la que se fijan las placas de acero esmaltado.

Finalizada esta etapa y fuertemente ligado a la alta tecnología y la industria capaz de plantearse el uso de nuevos materiales muy ligeros y resistentes como las telas y los textiles plásticos flexibles, entre otros, y de métodos de sustentación, rigidizados o estabilizados mucho más complejos, a lo largo del último tercio del siglo XX, y hasta el momento presente, se han ido desarrollando estructuras de cubrición capaces de generar esfuerzos prácticamente de tracción pura, de aceptar cambios de forma cuando se modifican los estados de carga y hasta de permitir la recogida y plegado de las mismas. Son prácticamente membranas con una alta y casi excluyente resistencia a la tracción en los planos tangentes de la superficie. Estas estructuras necesitan complementariamente, diferentes sistemas de estabilizado que cubran el rango de las distintas formas que pueden adoptar, a través de sustentaciones, tensados o rigidizadores, independientes o intercalados, mediante soportes, y cables de diversos tipos. El alemán **Frei Otto** es, en cierto modo, un punto de partida para la generación que le sigue (**Kawaguchi**, **Saito**,...). Este punto de partida lo podemos situar en su tesis doctoral "El tejado colgante" (1954), o en sus inmediatas construcciones posteriores cubiertas con lona (la Bundesgartenschauen, la "Tanzbrunnen"). Su búsqueda de formas colgadas no estuvo al margen de las formas "naturales". El propio arquitecto canalizó este interés, a través del grupo "Biología y Naturaleza", hacia el estudio de los caparazones silíceos de unas especies muy distinguidas entre las algas como son las diatomeas, especies unicelulares, algunas de cuyas "conchas" – frústulos – resultan especialmente interesantes.

El estudio de las formas naturales biológicas consecuencia de observar o escudriñar – con técnicas auxiliares – el mundo material que rodea al hombre, ha sido constante a lo largo del tiempo. Podemos recordar aquí que, en su búsqueda de las máquinas que permitieran al hombre volar imitando a los pájaros, **Leonardo de Vinci** mostró un interés particular por la estructura de las alas de los murciélagos. En sus notas manuscritas de 1505 precisa que "la piel de la membrana recubre y refuerza el esqueleto, que es lo esencial de las alas". No es difícil encontrar algunas estructuras de edificación, muy actuales, que recuerdan claramente esta disposición natural. Desde los caparazones de las tortugas a los esqueletos de los radiolarios, pasando por las conchas de algunos moluscos y cefalópodos, algunos huevos de insectos o conglomerados coralinos etc., existe una variedad infinita de formas naturales superficiales que han sido y pueden ser objeto de interés puramente geométrico o estructural. Para **Otto** las estructuras óptimas la proporcionan las algas silíceas –diatomeas–, las telas de araña y las pompas de jabón –superficies mínimas –. Como se sabe, las superficies mínimas están muy relacionadas con las formas naturales ya que la Naturaleza tiende a minimizar su trabajo de cubrición.

Por otra parte están las superficies generadas "desde la matemática". Encontramos, por ejemplo, que las superficies descritas paramétricamente en la forma de **Monge** por funciones armónicas –soluciones de la ecuación de **Laplace**– que satisfacen diferentes condiciones adecuadas impuestas al contorno, pueden constituir una fuente de formas "teóricas" para las membranas y, en general, sugerir diferentes formas curvadas. Su replanteo y la determinación de sus coordenadas, utilizando por ejemplo métodos numéricos en diferencias, pueden además ser obtenidas por procedimientos elementales aunque onerosos. En este campo, los ordenadores actuales se convierten en prácticamente imprescindibles.

Finalmente, en distintos campos relacionados con la arquitectura o la decoración, se manifiesta un cierto interés por las superficies mínimas, soluciones del "problema de **Plateau**" ya citado anteriormente; o sea: el uso de las películas delimitadas por contornos diversos como fuente de formas físico-geométricas de equilibrio estable. El propio **Otto** ha estudiado distintos modelos con muy elaboradas técnicas, obteniendo con mucha precisión, al parecer, la respuesta geométrica de membranas de este tipo a los distintos condiciones de carga, y la influencia sobre la forma de distintos estabilizadores, atirantados o tensados, o la de soportes, mástiles perimetrales o intercalados. Así mismo, se ha estudiado la mayor estabilidad en el acoplamiento de superficies mínimas o el uso de superficies mínimas periódicas.

§ 19.-Algunas notas sobre los condicionantes geométricos en los límites de validez de la teoría de la membrana de láminas curvas.

Cada uno de los puntos de una lámina curva o cascarón de pequeño espesor constante "e", con una superficie media definida por la superficie parametrizada **r (u, v)** en una cierta región limitada por sus parámetros, puede ser descrita por la función:

r (t, u, v)= r (u, v) + t n (u, v),

en la que el parámetro "t" varía en el rango **[–e/2,e/2]**, y aquí los lugares geométricos **u = cte** y **v = cte** se convierten en superficies regladas.

Desde la teoría de la elasticidad de la cáscara así definida, el problema de la determinación matemática de las tensiones y/o deformaciones es un problema complejo bastante extenso –aún eliminando las cantidades que no influyen apreciablemente en los resultados– por la gran cantidad de incógnitas y condiciones. Las ecuaciones elásticas de equilibrio y compatibilidad –gobernadas por la geometría del cascarón– pueden llegar a plantearse de manera bastante rigurosa, pero pasa que, en la medida en que estén planteadas con mayor rigor, su aplicación se hace más difícil. La solución del sistema completo de ecuaciones en derivadas parciales se hace muy onerosa o directamente inabordable, y, en general, se requieren métodos especiales de integración adaptados a cada uno de los problemas concretos. Por eso fue inevitable la aparición de métodos aproximados o hipótesis complementarias suficientemente plausibles, que nos permiten reducir el modelo general matemático–elástico con suficiente viabilidad de comportamiento para que pueda resultar aplicable, y esto lleva inevitablemente a la descripción preferente de los límites de validez de cada modelo propuesto. Esta situación cambia radicalmente con el desarrollo de la nueva tecnología auxiliar de cálculo y la introducción de otro tipo de métodos numéricos finitos con un rango de aplicación muy general para cualquier tipo de estructura y de geometría, en cuya descripción no entramos aquí.

Se puede pensar con cierta lógica que la teoría general de la flexión elástica no es la más adecuada para este tipo de estructuras, sobre todo cuando las láminas son de doble curvatura. Entre unas cosas y otras, parece que el uso práctico del estudio de las cáscaras desde la elasticidad recibe hoy escasa atención y también es razonable pensar que es una de esas cosas de apariencia complicada que dan cierta importancia pero que, en realidad, desde el punto de vista práctico, sirven para poco.

Cargas concentradas importantes pueden introducir localmente variaciones en la curvatura y por lo tanto, esfuerzos de flexión que pueden extenderse más o menos sobre la región próxima en función de su importancia, pero para solicitaciones moderadas y para espesores "**e**" muy pequeños en relación a cualquier otra dimensión –que es lo que pasa con los cascarones delgados–, se planteó casi al mismo tiempo que la teoría general de la flexión, y bajo ciertas hipótesis, una teoría sencilla que conocemos como "de membrana", utilizada en algunos tipos de cáscaras delgadas comunes como las de revolución, algunas de traslación y algunas regladas tradicionales y "modernas". Estas hipótesis tratan de asimilar la forma de trabajo de las membranas puras, con resistencia solamente a la extensión, que consiste en que cambian su forma para adaptarse a las cargas que las solicitan de manera que los esfuerzos internos – tracciones – se conserven en el plano tangente a la superficie deformada. Las membranas puras resultan así estables, siempre que las tensiones permanezcan dentro del rango de las admisibles, para conjuntos diferentes de sobrecargas existiendo para cada una de ellas una superficie deformada. En general, en los cascarones rígidos no hay manifiestos cambios de forma, bien porque sean superficies que globalmente no los permiten sin rotura – de doble curvatura – bien porque los tengan impedidos en sus apoyos, y debe admitirse que sean capaces de resistir las solicitaciones exteriores mediante esfuerzos internos muy predominantes de tracciones–compresiones, más esfuerzos cortantes, que permanecen en el plano tangente del cascarón rígido dentro de valores admisibles, aunque en cáscaras muy delgadas las fuerzas de compresión deben ser pequeñas para evitar problemas de pandeo. El resultado final es que cuando no hay cambio de curvatura es cuando puede hablarse propiamente de régimen de membrana en los cascarones, lo que puede parecer contradictorio. El carácter bidimensional del fragmento elemental del cascarón permite, dentro de los valores admisibles de las tensiones, distintas redistribuciones de los esfuerzos principales y cortantes, de manera que resulta también estable para distintas solicitaciones moderadas dentro de un cierto rango.

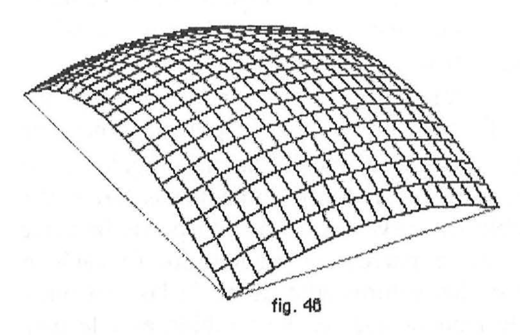
Desde ciertos condicionantes muy generales e inviolables, puede establecerse una teoría casi de membrana desde la propia teoría general de la flexión o bien establecerla sin ningún tipo de conexión con ésta, centrándose solamente en los esfuerzos, por ejemplo, y por lo tanto sin tener que considerar la gran cantidad de condicionantes de compatibilidad que exige la teoría general. Pueden incluso obtenerse los esfuerzos generales de muchas láminas curvas con bastante facilidad y de forma completamente elemental utilizando solamente ecuaciones de equilibrio.

Una suposición fundamental para cualquiera de los dos sistemas de aproximación a las membranas es la de que los esfuerzos a lo largo del espesor estén distribuidos uniformemente y que las fuerzas normales del cortante sean nulas; en este caso, desaparecen los momentos de flexión y torsores que provienen de la variación del cortante. Para que tal suposición sea razonable, entre otras cosas, el espesor debe ser pequeño pero, al mismo tiempo, tiene

que ser suficiente amplio para resistir los pequeños esfuerzos de compresión y el pandeo. En cualquier caso, ha de considerarse que los esfuerzos están contenidos en cada fragmento elemental del plano tangente –un "plano" tangente más o menos "grueso"– a la superficie media, alrededor de cada punto. En una teoría de la membrana elemental, la estructura se identifica más o menos idealmente con su propia superficie media y solamente se considera el espesor cuando se trata de precisar las tensiones. Cada región rectangular elemental estará sometida a fuerzas en dos direcciones ortogonales más los esfuerzos cortantes en el propio plano. Cuando la superficie está referida a sus líneas de curvatura principal, y el fragmento elemental está delimitado por ellas, el mismo resultado se obtiene considerando solamente los esfuerzos de tracción-compresión sin colaboración del cortante.

Si con estos condicionantes más o menos radicalizados partimos de los sistemas de relaciones de la teoría general elástica, las ecuaciones se simplifican notablemente, en cualquier caso, con la suposición de que la superficie parametrizada está referida a sus líneas de curvatura principal; esto es: superficies en las que $\mathbf{f} = \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en todos sus puntos. Y aquí entramos en un problema puramente de representación paramétrica de la superficie media. Esta suposición debe ser, sin embargo, generalmente descartada salvo para algunos tipos de superficies en los que esta parametrización resulta natural, como pasa en las superficies de revolución de eje vertical u otras en las que se garantice su accesibilidad a un coste razonable de cálculo –que son pocas–. El problema de describir una superficie en función de sus líneas principales de curvatura puede, a pesar de estar teóricamente garantizado, resultar muy complicado o puede convertirse en prácticamente inabordable. Aunque el problema en sí pueda plantearse de forma sencilla, la integración puede presentar muchas dificultades. Podría admitirse como una opción algo más accesible, que la superficie esté referida a líneas coordenadas ortogonales ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) pero no simultáneamente conjugadas ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$), lo que no introduce una simplificación notable.

Es posible imaginar un cascaron en su totalidad –delimitado solamente por la limitación general de parámetros de la superficie media– sometido sólo a esfuerzos de membrana, pero es muy difícil en la práctica que esto puede convertirse en una estructura real. Para que una cáscara pueda resistir una serie de esfuerzos en régimen de membrana ésta deberá estar limitada y sustentada en ese límite apropiadamente. En términos elementales la adecuación puede reducirse a decir que las fuerzas en la frontera deben ser también fuerzas de membrana –componentes muy predominantes en el plano tangente– y permitir deformaciones que también sean "de membrana" –en el plano tangente–. Considerando ambos condicionantes, el más importante es, con mucho, el que atañe a los esfuerzos, y por eso las desviaciones de la regla se denominan a veces esfuerzos "de perturbación principal". Como los esfuerzos de frontera incluyen, en general, fuerzas que no son tangentes y también cortantes, el equilibrio de cascarones reales en régimen de membrana ideal en las proximidades de la frontera resulta difícil de establecer. Esta situación es poco factible en la práctica así que podemos concluir que en todos los cascarones reales se verifican, en mayor o menor medida, esfuerzos de flexión que tienen predominio en ciertas regiones de la superficie. Estos esfuerzos de "distorsión" sobre las simplificaciones, se pueden extender en regiones más o menos amplias, generalmente desde las vecindades de la frontera, y también desde otras líneas definidas sobre la superficie.

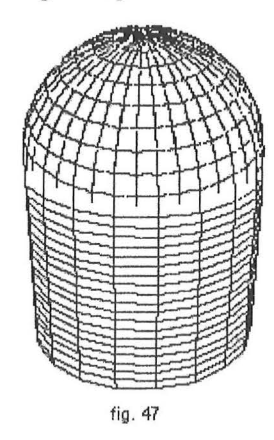

fig. 46

Podemos tomar un ejemplo sencillo con un paraboloide elíptico de poco peralte, cargado uniformemente, que cubre un rectángulo apoyado en sus cuatro arcos y sustentado en sus cuatro vértices inferiores (figura 46). En un régimen puro de membrana y en una estimación elemental, los cortantes en las fronteras se anulan teóricamente en las claves de los arcos y alcanzan valores teóricamente infinitos en los apoyos en los que está sometido a cortante puro.

Es claro que las líneas de frontera– los bordes de la superficie – son determinantes en los límites de validez de la teoría. Lo que, bajo determinadas condiciones resulta aceptable en el interior de la membrana, se convierte en muy cuestionable en sus fronteras, y de ahí que se admita que el régimen de membrana, cuando las hipótesis del modelo lo hacen posible y adecuado, es aplicable, por ejemplo, sólo a cierta distancia de los bordes, o de otras posibles líneas de distorsión. Desde la teoría general de la flexión elástica y en lo que se refiere solamente a los condicionantes puramente geométricos, las limitaciones pueden describirse a través de las "líneas de distorsión" de la superficie. Entre ellas se encuentran predominantemente:

Los bordes
Las líneas de puntos singulares de la superficie
Las líneas a lo largo de las cuales la curvatura cambia bruscamente

Se puede encontrar un ejemplo, sencillo pero representativo, en el que la curvatura cambia bruscamente si consideramos la circunferencia de unión de un cilindro circular cubierto con una cúpula esférica del mismo radio (figura 47). La variedad formada por la suma de ambos fragmentos en la línea de unión conserva condiciones de tangencia pero no de forma.


fig. 47

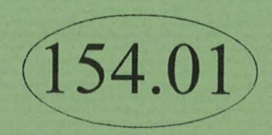
Por lo tanto el régimen de membrana de la teoría simplificada puede ser aceptable a suficiente distancia de las líneas de distorsión interiores y a suficiente distancia de los bordes. Se comprende que los fragmentos de superficie, entre líneas de distorsión, deben ser de suficiente extensión para que sea factible el aplicar condiciones de membrana en regiones suficientemente alejadas de estas líneas, ya que si tal cosa no ocurre, predominan las perturbaciones de éstas. En determinados casos podemos calcular los esfuerzos con cierta facilidad y rediseñar las líneas de perturbación para que sean capaces de soportar los esfuerzos no compensados, que pueden llegar a ser muy considerables. Este redimensionado afecta a su vez, nuevamente, al comportamiento de toda la cáscara, así que el problema de encontrar un diseño equilibrado no resulta, en general, nada fácil. En una superficie sin puntos singulares intrínsecos ni líneas a lo largo de las cuales la curvatura cambie bruscamente, la distorsión depende esencialmente de los bordes de la superficie y, naturalmente de las condiciones de sustentación a lo largo de los mismos.

En la práctica existen también otros condicionantes referentes a las dimensiones relativas, pero siguiendo con los que se refieren a la forma, que son lo que nos interesa señalar, y siguiendo el análisis desde la teoría elástico-matemática pura, nos referiremos a un interesante aspecto que afecta a los bordes y que constituye una restricción más en las condiciones de aplicabilidad de la membrana. Esta restricción, como veremos, afecta a su vez, sensiblemente, a las superficies desarrollables. Es el hecho de que, siempre desde el punto de vista teórico, ninguna línea de distorsión puede coincidir con líneas asintóticas de la superficie ni tener, teóricamente, un solo punto parabólico, lo que excluye así mismo la tangencia, ya que en este caso el análisis teórico más general se hace matemáticamente irresoluble. Se puede observar, por ejemplo, que en el uso como superficies de cubrición de cilindros o conos, quedan pocas posibilidades de selección de fragmentos con bordes que no coincidan ni sean tangentes a las generatrices. Esta circunstancia restaría muchas posibilidades de utilización, salvo fragmentos longitudinales que incluyan secciones cerradas –sin puntos de inflexión– que formen en cualquiera de sus puntos cualquier ángulo no nulo con las generatrices, tales como los tubos o depósitos cilíndricos o cónicos completos, cargados radialmente, con cualesquiera cortes transversales y sin aberturas en su superficie lateral, porque esto nos llevaría nuevamente a la tangencia del borde con las generatrices. Todo ello no es obstáculo para que, en la práctica, se analicen como membranas bóvedas de medio cañón, por ejemplo, a distancias moderadas de sus fronteras, siempre que sean cortas y estén adecuadamente sustentadas, y de la mima manera, otros sectores semejantes con diferentes apoyos o condiciones de sustentación que minimizan este condicionante "teórico" tan riguroso. En realidad, las bóvedas de cañón cilíndricas o fragmentos cónicos muy cortos pueden acercarse al comportamiento predominante de los arcos, y las largas al comportamiento predominante de una viga transversal, en general solicitada a flexión compuesta.

Todo ello nos va conduciendo inexorablemente a las superficies de revolución de eje vertical como las más idóneas para trabajar en régimen de membrana, siempre que se disponga de estructuras adicionales en las líneas de distorsión y particularmente en los bordes – vigas curvas, refuerzos, regruesamientos, atirantados, etc –, encargadas de resistir los esfuerzos resultantes no compensados, pero sin que estas correcciones supongan una manifiesta y predominante discontinuidad que ponga en cuestión todo el modelo. Acoplamientos de distintas superficies que no conserven la continuidad de las curvaturas introducen líneas de distorsión que podrían tener la misma importancia que los bordes. Evitar estas líneas en los acoplamientos nos lleva a otro problema puramente geométrico, como es el de la unión de dos fragmentos de superficies distintas en los que se conserve la continuidad de la curvatura en determinadas direcciones preferentes, lo que puede conducir a considerar fragmentos de superficie que las enlaza. Otras uniones se manifiestan claramente como líneas singulares del conjunto, y son tratadas de forma individualizada como estructuras independientes. Adecuadas para las simplificaciones, además de las superficies de revolución pueden ser tenidas en cuenta algunas superficies de traslación, entre las que destaca fundamentalmente el paraboloide hiperbólico –superficie, además, de doble curvatura y con dos sistemas de generatrices rectas–, cuyos diferentes fragmentos presentan muchas posibilidades y ventajas tanto desde el punto de vista geométrico como en el puramente elástico, constructivo, estructural y estético, y también el hiperboloide alabeado de una hoja (láminas "HP"), que, como se sabe, es una superficie de revolución y también doblemente reglada.

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

